Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите значение интеграла в полярных координатах: $\iint\limits_D \left(x-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, $D: x^2+y^2 \le 4$.

Решение

Уравнение $x^2+y^2=4$ задаёт окружность с центром в начале координат и радиусом $R=2$. В полярной системе координат уравнение окружности будет таким:

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho^2=4;\ \rho=2.$$

Неравенство $x^2+y^2 \le 4$ определяет множество точек внутри и на данной окружности. Следовательно, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$.

$$\iint\limits_D \left(x-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho(\rho\cos\varphi-\rho)d\rho = \int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi-1)d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho = \int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi-1)\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 d\varphi =$$

$$=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi-1)d\varphi=\frac{8}{3}\cdot(\sin\varphi-\varphi)\Big|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\cdot(-2\pi)=-\frac{16\pi}{3}.$$

Ответ: $-\frac{16\pi}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.