Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана линиями $y^2=2x$, $x^2=2y$, $x\le 1$.

Решение

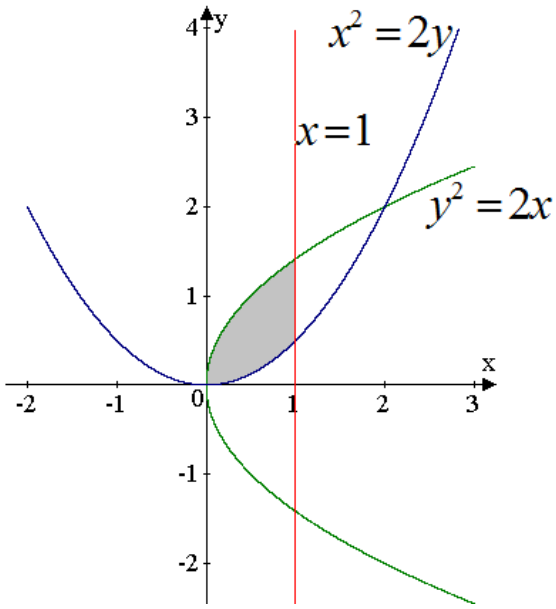
Найдем точки пересечения парабол $y^2=2x$ и $x^2=2y$:

$$\begin{cases} y^2=2x; \\ x^2=2y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{y^2}{2}; \\ x^2=2y. \end{cases}$$

$\left(\dfrac{y^2}{2}\right)^2=2y$, $\dfrac{y^4}{4}=2y$, $y^4=8y$, $y(y^3-8)=0$, $y_1=0$, $y_2=2$.

Графики пересекаются в точках $(0;0)$ и $(2;2)$.

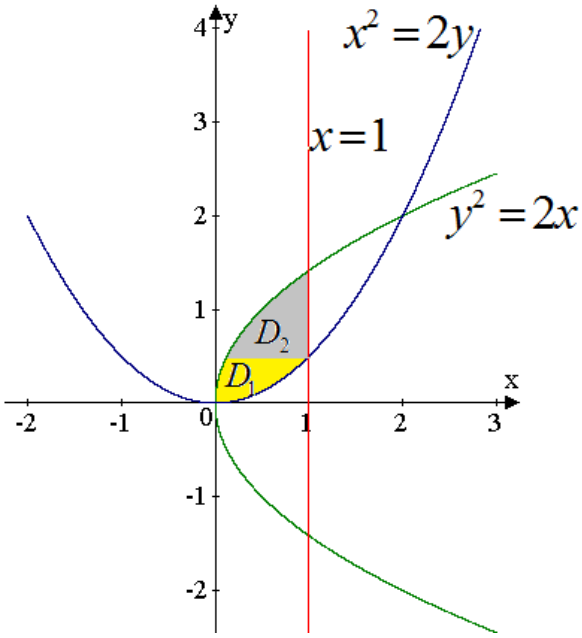
Прямая $x=1$ пересекает параболу $y^2=2x$ в точках $(1;-\sqrt{2})$ и $(1;\sqrt{2})$. Прямая $x=1$ пересекает параболу $x^2=2y$ в точке $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.



Для области интегрирования получим: $0\le x\le 1$, $\dfrac{x^2}{2}\le y\le\sqrt{2x}$, поэтому:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$$

Разобьем область интегрирования на две части:



$D_1: 0 \le y \le \frac{1}{2},\ \frac{y^2}{2} \le x \le \sqrt{2y}$

$D_2: \frac{1}{2} \le y \le \sqrt{2},\ \frac{y^2}{2} \le x \le 1$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{2y}} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1} f(x,y)dx\,.$$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.