Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$. Изобразить область интегрирования. Вычислить интеграл, положив $f(x,y)=x+y$.

Решение

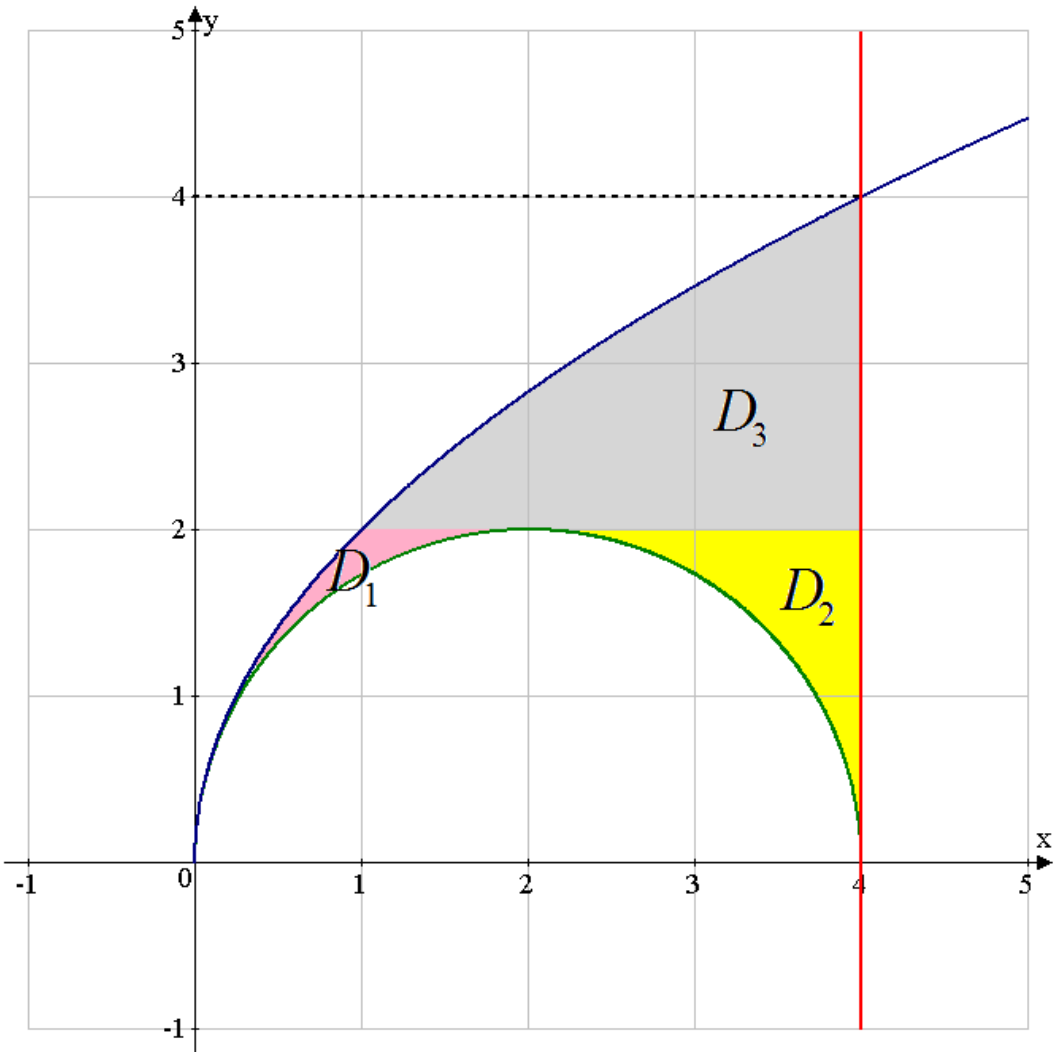
Так как $\sqrt{4x-x^2}\geq 0$, то из уравнения $y=\sqrt{4x-x^2}$ имеем $y\geq 0$.

$$y^2=4x-x^2,\ x^2-4x+y^2=0,\ x^2-4x+4+y^2=4,\ (x-2)^2+y^2=4.$$

Уравнение $(x-2)^2+y^2=4$ определяет окружность с центром в точке $(2;0)$ и радиусом $R=2$. Найдём точки пересечения полуокружности $y=\sqrt{4x-x^2}$ и ветви параболы: $y=2\sqrt{x}$:

$$2\sqrt{x}=\sqrt{4x-x^2}$$
$$4x=4x-x^2$$
$$x^2=0;\ x=0.$$

Графики пересекаются в точке $(0;0)$. Разобьём область интегрирования на три: D_1, D_2, D_3.



$$y=\sqrt{4x-x^2} \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow |x-2|=\sqrt{4-y^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{4-y^2} \\ x=2+\sqrt{4-y^2} \end{array}\right.$$

$$y=2\sqrt{x} \Rightarrow x=\frac{y^2}{4}.$$

$$D_1:\begin{cases} 0\le y\le 2 \\ \dfrac{y^2}{4}\le x\le 2-\sqrt{4-y^2} \end{cases} \qquad D_2:\begin{cases} 0\le y\le 2 \\ 2+\sqrt{4-y^2}\le x\le 4 \end{cases} \qquad D_3:\begin{cases} 2\le y\le 4 \\ \dfrac{y^2}{4}\le x\le 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy=\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)dx+\int_2^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)dx$$

Вычислим интеграл при условии $f(x,y)=x+y$:

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy=\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} (x+y)dy=\int_0^4 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} dx=\int_0^4 \left(\frac{x^2}{2}+2x^{\frac{3}{2}}-x\sqrt{4x-x^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^4 \left(\frac{x^2}{2}+2x^{\frac{3}{2}}\right)dx-\int_0^4 x\sqrt{4x-x^2}\,dx=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^4-\int_0^4 x\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx=\frac{544}{15}-\int_0^4 x\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx=$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = x - 2;\ dt = dx. \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & -2 & 2 \end{array} \end{array} \right] = \frac{544}{15} - \int\limits_{-2}^{2} (t+2)\sqrt{4-t^2}\,dt = \frac{544}{15} - \int\limits_{-2}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt - 2\cdot\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

Так как функция $t\sqrt{4-t^2}$ – нечётная, то $\int\limits_{-2}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt = 0$. Так как функция $\sqrt{4-t^2}$ – чётная, то получим:

$$\frac{544}{15} - \int\limits_{-2}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt - 2\cdot\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt = \frac{544}{15} - 4\cdot\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt = \frac{544}{15} - 4\cdot\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\arcsin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{544}{15} - 8\cdot\arcsin 1 = \frac{544}{15} - 4\pi.$$

Ответ:

- $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)dx$
- $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy = \frac{544}{15} - 4\pi$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.