Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Преобразовать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в двукратный, если $D: x^2+y^2-4y\le 0,\ y\le 4-x,\ x\ge 0$.

а) изменить порядок интегрирования,
б) перейти в полярную систему координат и расставить пределы по новым переменным.

Решение

$$x^2+y^2-4y\le 0,\ x^2+y^2-4y+4\le 4,\ x^2+(y-2)^2\le 4.$$

Данное неравенство определяет точки внутри и на окружности $x^2+(y-2)^2=4$ с центром в точке $(0;2)$ и радиусом $R=2$.

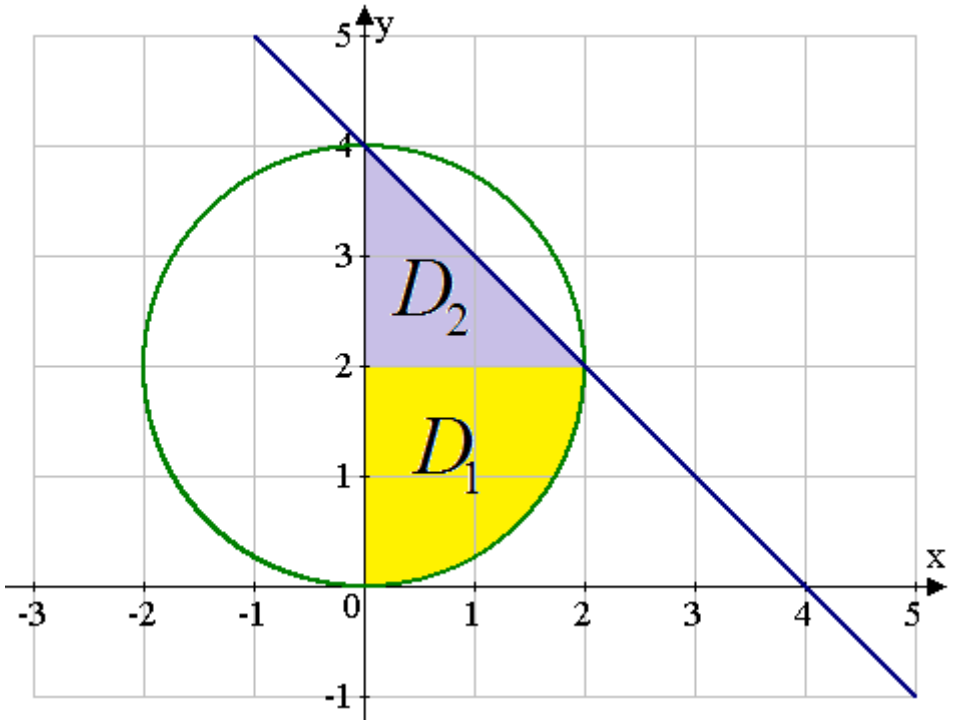
Неравенству $y\le 4-x$ удовлетворяют точки, расположенные под прямой $y=4-x$. Найдём точки пересечения окружности и прямой:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y=0; \\ y=4-x. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-4y=0; \\ x=4-y. \end{cases}$$

$(4-y)^2+y^2-4y=0,\ 16-8y+y^2+y^2-4y=0,\ 2y^2-12y+16=0,\ y^2-6y+8=0.$

$$y^2-6y+8=0$$
$$D=36-32=4;$$
$$y_1=\frac{6-2}{2}=2;\ y_2=\frac{6+2}{2}=4.$$

Графики пересекаются в точках $(2;2)$ и $(4;0)$. Область интегрирования D разобьем на две: $D=D_1\cup D_2$.



Для той части окружности, для которой $0 \le y \le 2$, получим:

$x^2 + (y-2)^2 = 4$, $(y-2)^2 = 4 - x^2$, $|y-2| = \sqrt{4-x^2}$, $-(y-2) = \sqrt{4-x^2}$, $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$.

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2 - \sqrt{4-x^2} \le y \le 4 - x \end{cases}$$

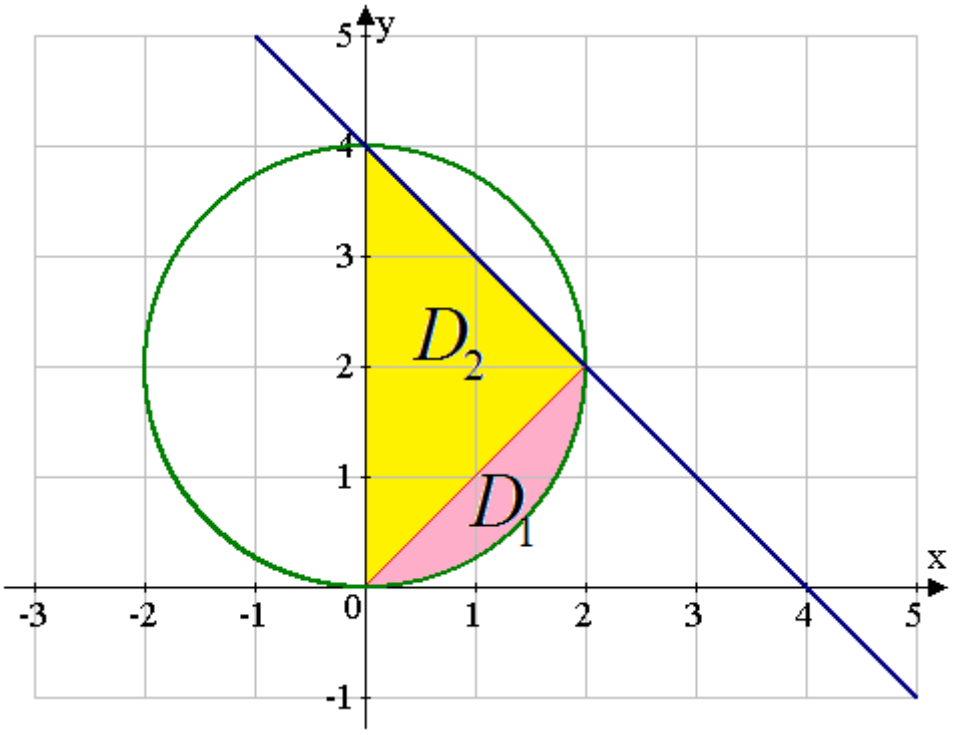
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-\sqrt{4-x^2}}^{4-x} f(x,y)dy$$

Для областей D_1 и D_2 получим:

$$D_1: \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le \sqrt{4y - y^2} \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le 4 - y \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)dx$$

Перейдём в полярную систему координат:



$$y = 4 - x \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi = 4 - \rho\cos\varphi;\;\; \rho\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right) = 4;\;\; \rho = \frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0;\;\; x^2 + y^2 = 4y \;\Rightarrow\; \rho^2 = 4\rho\sin\varphi;\;\; \rho = 4\sin\varphi.$$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le 4\sin\varphi \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le \dfrac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi} \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} \rho\, f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{4}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \rho\, f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho$$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.