Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Преобразовать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в двукратный и расставить пределы по заданной области интегрирования D. Изменить порядок интегрирования. Перейти к полярным координатам.

$$\left\{y\ge 0,\ x\ge 0,\ x^2+y^2\le 8,\ x^2+(y-2)^2\ge 4\right\}\cup\left\{y\le 0,\ x^2+y^2\le 8\right\}$$

Решение

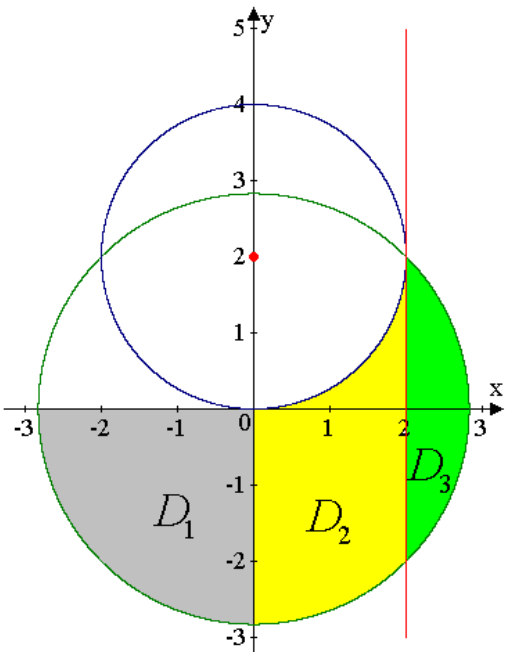
Уравнение $x^2+y^2=8$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R_1=2\sqrt{2}$. Уравнение $x^2+(y-2)^2=4$ определяет окружность с центром в точке $(0;2)$ и радиусом $R_2=2$.

Для построения чертежа найдем точки пересечения данных окружностей:

$$\begin{cases}x^2+y^2=8;\\ x^2+(y-2)^2=4.\end{cases}$$

$$y^2-(y-2)^2=4;\ 4y-4=4;\ y=2;\ \left[\begin{array}{l}x=-2;\\ x=2.\end{array}\right.$$

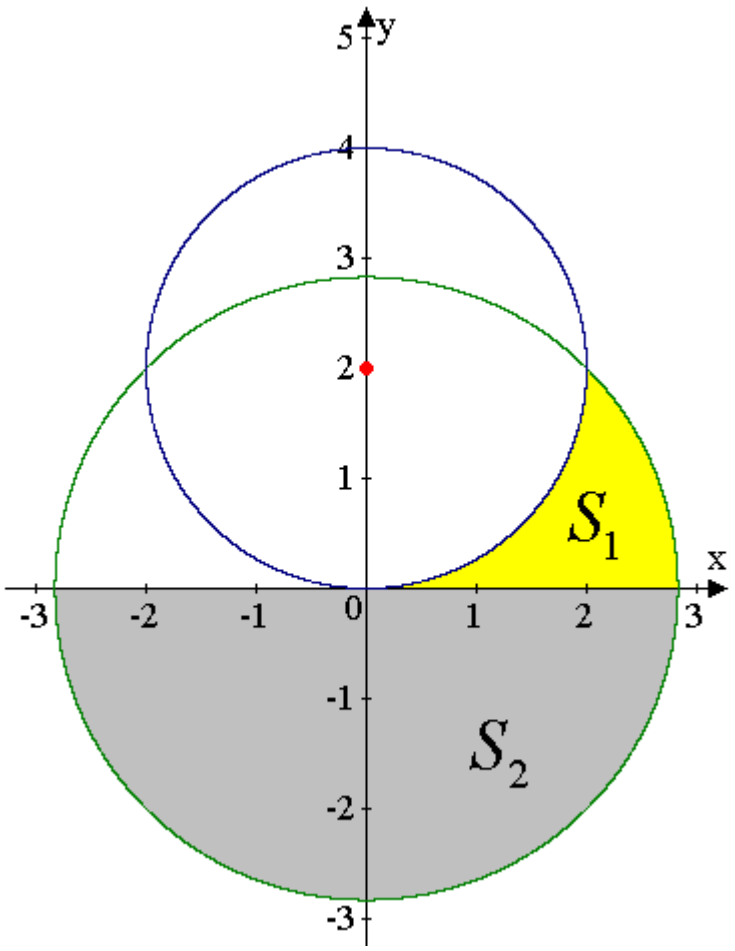
Разобьем область D на три части: $D=D_1\cup D_2\cup D_3$:



$$D_1:\begin{cases}-2\sqrt{2}\le x\le 0;\\ -\sqrt{8-x^2}\le y\le 0.\end{cases},\ D_2:\begin{cases}0\le x\le 2;\\ -\sqrt{8-x^2}\le y\le 2-\sqrt{4-x^2}.\end{cases},\ D_3:\begin{cases}2\le x\le 2\sqrt{2};\\ -\sqrt{8-x^2}\le y\le \sqrt{8-x^2}.\end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{2}^{2\sqrt{2}}dx\int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)dy$$

Для смены порядка интегрирования разобьем заданную область новым разбиением $D = S_1 \cup S_2$:



$$S_1: \begin{cases} 0 \le y \le 2; \\ \sqrt{4y - y^2} \le x \le \sqrt{8 - y^2}. \end{cases}, \; S_2: \begin{cases} -2\sqrt{2} \le y \le 0; \\ -\sqrt{8 - y^2} \le x \le \sqrt{8 - y^2}. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{-2\sqrt{2}}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx$$

В полярной системе координат уравнение окружности $x^2 + y^2 = 8$ станет таким: $\rho = 2\sqrt{2}$. Уравнение окружности $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4y$ примет вид $\rho = 4\sin\varphi$. Найдем значение угла, при котором пересекаются данные окружности в первой четверти:

$$4\sin\varphi = 2\sqrt{2}; \; \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}; \; \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$S_1: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 4\sin\varphi \le \rho \le 2\sqrt{2}. \end{cases}, \; S_2: \begin{cases} \pi \le \varphi \le 2\pi; \\ 0 \le \rho \le 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{2\sqrt{2}} \rho \cdot f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho + \int\limits_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho \cdot f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho$$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.