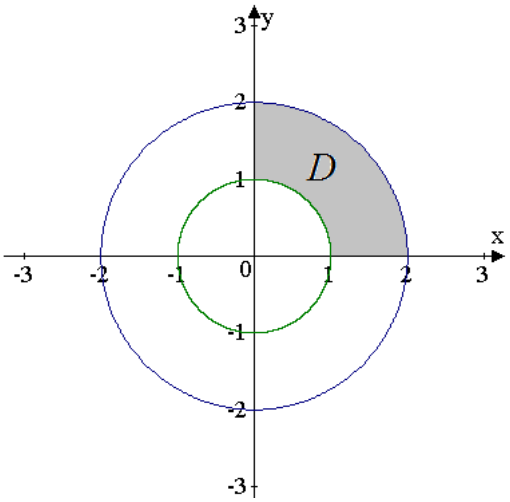
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Пластинка D задана ограничивающими её кривыми $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$), поверхностная плотность $\mu=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. Найти массу пластинки.

Решение

Уравнение $x^2+y^2=1$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R_1=1$. Уравнение $x^2+y^2=4$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R_2=2$. Область D будет такой:



Перейдем в полярную систему координат:

$$x^2+y^2=1;\ \rho^2=1;\ \rho=1.$$
$$x^2+y^2=4;\ \rho^2=4;\ \rho=2.$$

$$D:\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1\le\rho\le 2\end{cases}$$

$$M=\iint\limits_D\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_1^2\rho\cdot\frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho^2}d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi\int\limits_1^2 d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot\rho\big|_1^2 d\varphi=$$
$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi=(-\cos\varphi+\sin\varphi)\big|_0^{\pi/2}=1-(-1)=2.$$

Ответ: $M=2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.