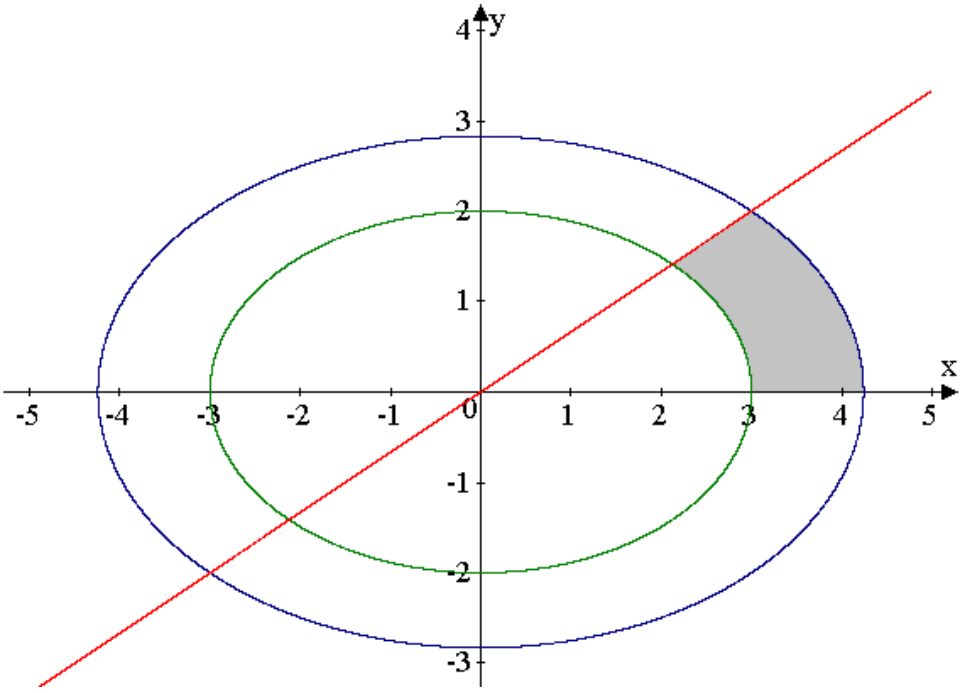
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Пластинка D задана неравенствами $1\le\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 2$, $y\ge 0$, $y\le\frac{2}{3}x$. Поверхностная плотность $\mu=\frac{y}{x}$. Найти массу пластинки.

Решение

Уравнение $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ определяет эллипс с центром в начале координат и полуосями $a=3$, $b=2$. Уравнение $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$, $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ определяет эллипс с центром в начале координат и полуосями $a=3\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$. Неравенство $1\le\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 2$ задаёт область между данными эллипсами. Условию $y\le\frac{2}{3}x$ удовлетворяют все точки, расположенные под и на прямой $y=\frac{2}{3}x$.



Перейдем в новую систему координат по формулам $\begin{cases}x=3\rho\cos\varphi\\ y=2\rho\sin\varphi\end{cases}$. Якобиан преобразования будет таким:

$$J=\begin{vmatrix}3\cos\varphi & -3\rho\sin\varphi\\ 2\sin\varphi & 2\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\cdot\left(6\cos^2\varphi+6\sin^2\varphi\right)=6\rho$$

Уравнения заданных линий станут такими:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;\ \rho^2=1;\ \rho=1$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2;\ \rho^2=2;\ \rho=\sqrt{2}$$

$y=\frac{2}{3}x;\ 2\rho\sin\varphi=\frac{2}{3}\cdot 3\rho\cos\varphi;\ tg\varphi=1;\ \varphi=\frac{\pi}{4}\ (для\ \ первой\ \ четверти)$

$$D:\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1\le\rho\le\sqrt{2}\end{cases}$$

$$M=\iint\limits_D\frac{y}{x}dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}6\rho\cdot\frac{2\rho\sin\varphi}{3\rho\cos\varphi}d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\varphi\,d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}2\rho d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\varphi\cdot\rho^2\Big|_1^{\sqrt{2}}d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\varphi\,d\varphi=-2\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4}=-2\cdot\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)=2\ln\sqrt{2}=\ln 2$$

Ответ: $M=\ln 2$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.