Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти массу пластины, ограниченной линиями L_1: $x^2+y^2=2x$, L_2: $y\ge\frac{1}{\sqrt{3}}x$, если поверхностная плотность $\delta(x,y)\equiv 1$.

Решение

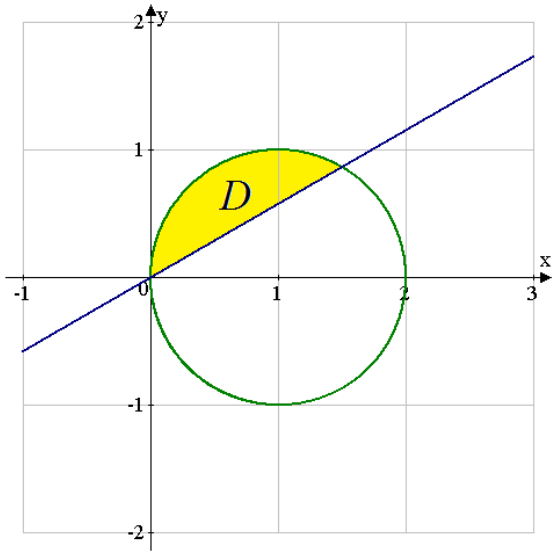
$$x^2+y^2=2x$$
$$x^2-2x+y^2=0;$$
$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Уравнение $x^2-2x+y^2=0$ определяет окружность с центром в точке $(1;0)$ и радиусом $R=1$. В полярной системе координат:

$$\rho^2=2\rho\cos\varphi,\ \rho=2\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Уравнение прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ станет таким:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ \rho\sin\varphi=\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \left[\begin{array}{l}\varphi=\frac{\pi}{6}\\ \varphi=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$$



$$\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2\cos\varphi$$

$$M=\iint\limits_D \delta(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\varphi d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.