Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить момент инерции относительно полюса для круглой пластинки с границей $r = 2a\sin\varphi$ ($a > 0$), если плотность $\gamma = 1$.

Решение

Так как $r \ge 0$, то и $\sin\varphi \ge 0$, поэтому $0 \le \varphi \le \pi$. Для заданной пластинки получим:

$$0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 2a\sin\varphi.$$

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)dxdy = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2a\sin\varphi} \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{\pi} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2a\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} 4a^4 \sin^4\varphi\, d\varphi = 4a^4 \int\limits_0^{\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi = 4a^4 \int\limits_0^{\pi} \left(\sin^2\varphi\right)^2 d\varphi = 4a^4 \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= a^4 \int\limits_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right)d\varphi = a^4 \int\limits_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^4 \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi = a^4 \cdot \left(\frac{3\varphi}{2} - \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi} = a^4 \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3\pi a^4}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.