Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

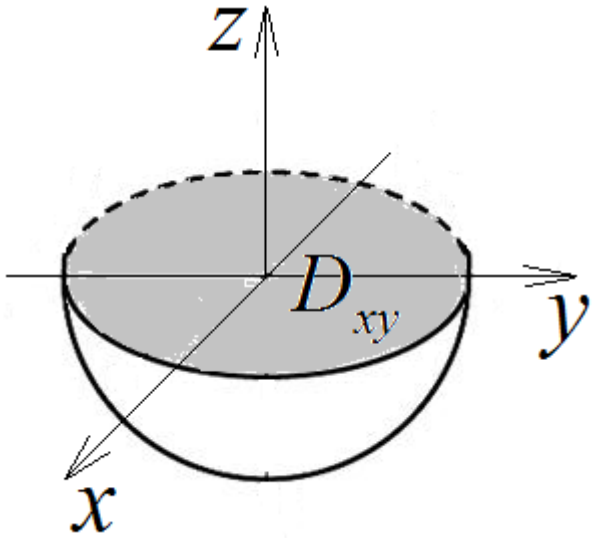
Найти статический момент относительно плоскости Oxy однородной фигуры, ограниченной плоскостью $z=0$ и поверхностью $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение

Для поверхности $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ имеем $z\le 0$. Возводим обе части равенства в квадрат:

$$z^2=1-x^2-y^2,\ x^2+y^2+z^2=1$$

Уравнение $x^2+y^2+z^2=1$ при условии $z\le 0$ определяет половину сферы (центр в начале координат, радиус $R=1$), расположенную под плоскостью $z=0$ (плоскость Oxy).



Если сфера однородна, то её плотность постоянна. Следовательно:

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z\gamma dxdydz=\gamma\iiint\limits_G zdxdydz=\gamma\cdot\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int\limits_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{0}zdz=\frac{\gamma}{2}\cdot\iint\limits_{D_{xy}}z^2\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{0}dxdy=-\frac{\gamma}{2}\cdot\iint\limits_{D_{xy}}\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$$

В проекции на плоскость Oxy имеем область D_{xy}, ограниченную окружностью $x^2+y^2=1$ с центром в начале координат и радиусом $R=1$. В полярной системе координат уравнение $x^2+y^2=1$ станет таким: $\rho=1$.

$$0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1.$$

$$-\frac{\gamma}{2}\cdot\iint\limits_{D_{xy}}\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=-\frac{\gamma}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)d\rho=-\frac{\gamma}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho-\rho^3\right)d\rho=-\frac{\gamma}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=$$

$$=-\frac{\gamma}{8}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{\gamma}{8}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=-\frac{\pi\gamma}{4}\cdot$$

Ответ: $-\frac{\pi\gamma}{4}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре,
аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.