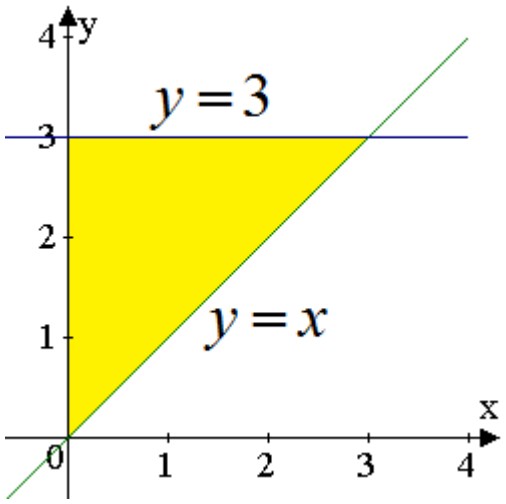
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти центр масс материальной области D с плотностью $\gamma = x + y$, где D – область, ограниченная линиями $x = 0$, $y = 3$, $y = x$.

Решение

Прямые $y = 3$ и $y = x$ пересекаются в точке $(3;3)$.



$0 \le y \le 3$, $0 \le x \le y$.

$$M = \iint\limits_D \gamma dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y (x+y)dx = \int\limits_0^3 \left(\frac{x^2}{2} + xy \right)\Big|_0^y dy = \frac{3}{2}\int\limits_0^3 y^2 dy = \frac{1}{2} \cdot y^3 \Big|_0^3 = \frac{27}{2}$$

$$M_x = \iint\limits_D y\,\gamma dxdy = \int\limits_0^3 ydy \int\limits_0^y (x+y)dx = \int\limits_0^3 y \cdot \left(\frac{x^2}{2} + xy \right)\Big|_0^y dy = \frac{3}{2}\int\limits_0^3 y^3 dy = \frac{3}{8} \cdot y^4 \Big|_0^3 = \frac{243}{8}$$

$$M_y = \iint\limits_D \gamma \cdot xdxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y x(x+y)dx = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y (x^2 + xy)dx = \int\limits_0^3 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} \right)\Big|_0^y dy = \frac{5}{6}\int\limits_0^3 y^3 dy = \frac{5}{24} \cdot y^4 \Big|_0^3 = \frac{135}{8}$$

Координаты центра тяжести $(x_C;\ y_C)$ будут такими:

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{135}{8}}{\frac{27}{2}} = \frac{5}{4},\ y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{243}{8}}{\frac{27}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; \frac{9}{4} \right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.