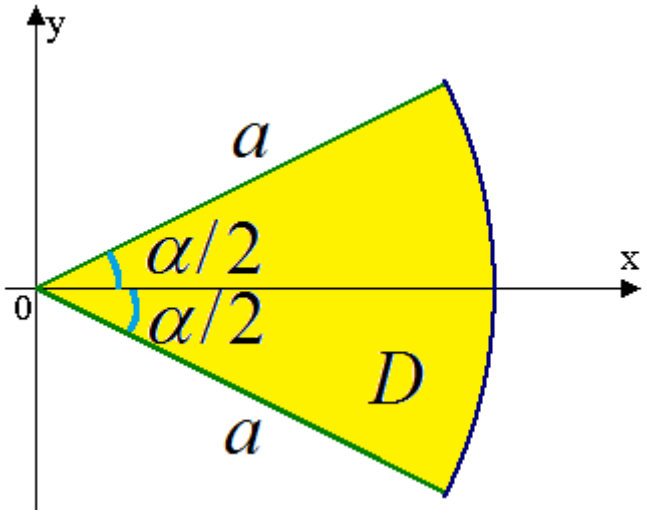
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти центр тяжести кругового сектора радиуса a с углом раствора α, принимая биссектрису его угла за ось Ox, а вершину – за начало координат, если плотность $\gamma = 1$.

Решение



Пусть центр тяжести имеет координаты $(x_C; y_C)$. Так как фигура симметрична относительно оси Ox, то центр тяжести находится на оси абсцисс, поэтому $y_C = 0$.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом a будет таким: $x^2 + y^2 = a^2$. В полярной системе получим: $\rho^2 = a^2$, $\rho = a$.

$$D: -\frac{\alpha}{2} \le \varphi \le \frac{\alpha}{2};\ 0 \le \rho \le a.$$

$$M = \iint\limits_D \gamma dxdy = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^2}{2} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \varphi\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{a^2}{2} \cdot \alpha = \frac{a^2\alpha}{2}.$$

$$M_y = \iint\limits_D x\gamma dxdy = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 \cos\varphi d\rho = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 d\rho = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{3} \cdot \sin\varphi\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{a^3}{3} \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{3}.$$

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{3}}{\frac{a^2\alpha}{2}} = \frac{4a\sin\frac{\alpha}{2}}{3\alpha}$$

Следовательно, центр тяжести лежит в точке $\left(\frac{4a\sin\frac{\alpha}{2}}{3\alpha};0\right)$. Т.е. искомый центр тяжести лежит на биссектрисе угла на расстоянии $\frac{4a\sin\frac{\alpha}{2}}{3\alpha}$ от вершины.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.