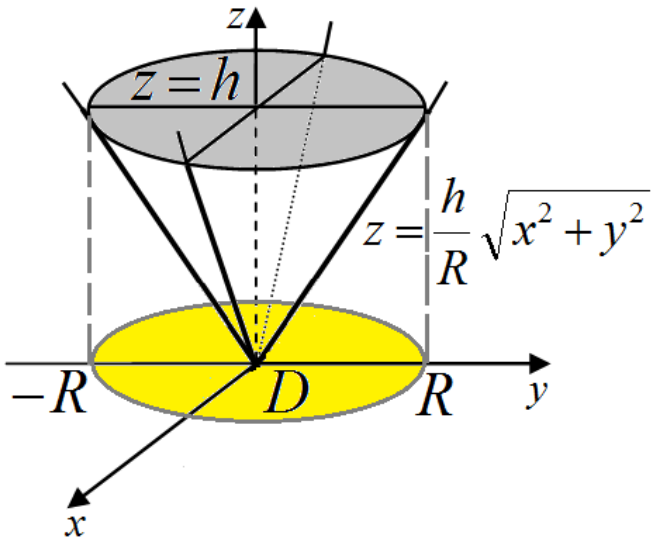
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Выведите формулу объёма конуса с высотой h и радиусом основания R через двойной интеграл.

Решение

Расположим вершину конуса в начале координат:



Уравнение конуса в выбранной системе координат будет таким: $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$. Так как высота конуса равна h, то сверху конус ограничен плоскостью $z=h$. В проекции на плоскость Oxy имеем область D, ограниченную окружностью $x^2+y^2=R^2$ с центром в начале координат и радиусом R.

$$V=\iint\limits_D\left(h-\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=h\iint\limits_D\left(1-\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Перейдём в полярную систему координат:

$$x^2+y^2=R^2\ \Rightarrow \rho^2=R^2;\ \rho=R.$$
$$0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le\rho\le R.$$

$$V=h\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho\left(1-\frac{\rho}{R}\right)d\rho=h\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(\rho-\frac{\rho^2}{R}\right)d\rho=h\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3R}\right)\Bigg|_0^R d\varphi=\frac{R^2h}{6}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{R^2h}{6}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{R^2h}{6}\cdot 2\pi=\frac{\pi R^2h}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^2h}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.