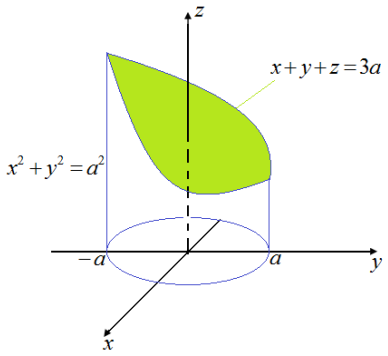
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти объем фигуры, ограниченной поверхностями $z=0$, $x+y+z=3a$, $x^2+y^2=a^2$, $a>0$.

Решение

Уравнение $x^2+y^2=a^2$ определяет круговой цилиндр, а уравнение $x+y+z=3a$ – плоскость:



В проекции на плоскость Oxy получим область D, ограниченную окружностью $x^2+y^2=a^2$ с центром в начале координат и радиусом a. Объем будет таким:

$$V=\iint\limits_D (3a-x-y)dxdy$$

Перейдем в полярную систему координат, в которой уравнение окружности станет таким: $\rho=a$. Для области D: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le a$.

$$V=\iint\limits_D (3a-x-y)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho(3a-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a(3a\rho-\rho^2\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3a\rho^2}{2}-\frac{\rho^3\cos\varphi}{3}-\frac{\rho^3\sin\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^a d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3a^3}{2}-\frac{a^3\cos\varphi}{3}-\frac{a^3\sin\varphi}{3}\right)d\varphi=a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{\cos\varphi}{3}-\frac{\sin\varphi}{3}\right)d\varphi=$$

$$=a^3\cdot\left(\frac{3\varphi}{2}-\frac{\sin\varphi}{3}+\frac{\cos\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^3.$$

Ответ: $3\pi a^3$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.