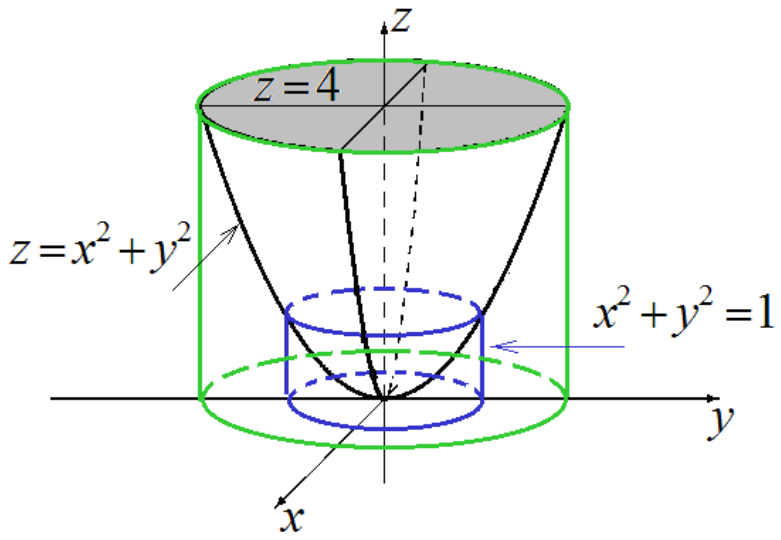
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

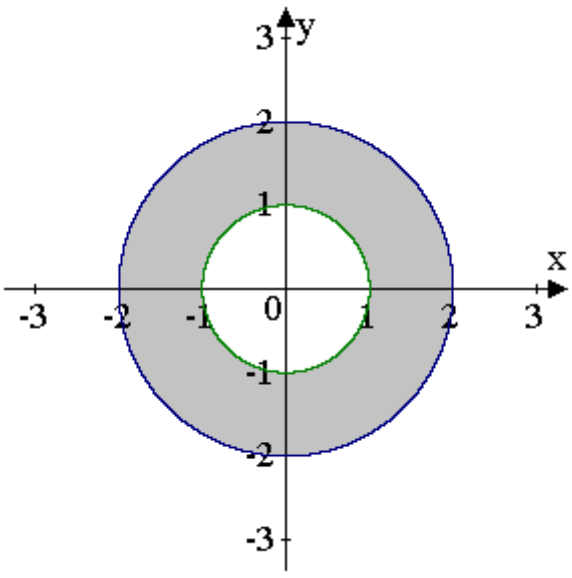
С помощью двойного интеграла вычислить объём тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ $(x^2 + y^2 \geq 1)$, $z = 0$.

Решение

Уравнение $z = x^2 + y^2$ определяет эллиптический параболоид. В сечении плоскостью $z = 4$ получим окружность, уравнение которой $\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет круговой цилиндр.



Для данного тела имеем $0 \leq z \leq x^2 + y^2$, поэтому $V = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$. В проекции на плоскость Oxy получим область D, ограниченную окружностями $x^2 + y^2 = 1$ (центр в начале координат, радиус $R = 1$) и $x^2 + y^2 = 4$ (центр в начале координат, радиус $R = 2$).



Перейдем в полярную систему координат. Уравнения окружностей станут такими: $\rho = 1$, $\rho = 2$. Для области D получим: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $1 \le \rho \le 2$.

$$V = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \rho^4\Big|_1^2 d\varphi = \frac{15}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{15}{4}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{15}{4}\cdot 2\pi = \frac{15\pi}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{15\pi}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.