Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти длину дуги кривой $y = \ln\sin x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

Решение

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Так как $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$, то $\sin x > 0$, поэтому для dl получим:

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}dx = \frac{dx}{\sin x}.$$

$$L = \int\limits_L dl = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\pi/3}^{2\pi/3} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right| = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\left(\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \ln 3.$$

Ответ: $\ln 3$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.