Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:

а) $y=e^x,\ \rho(x,y)=1,\ x_1=\ln\sqrt{3},\ x_2=\ln\sqrt{8}$

б) $\begin{cases} x=2\sqrt{t} \\ y=\dfrac{2}{3}t\sqrt{t} \end{cases},\ \rho(x,y)=\sqrt{1+\dfrac{3}{4}xy},\ t_1=1,\ t_2=4.$

Решение

а) $y=e^x,\ \rho(x,y)=1,\ x_1=\ln\sqrt{3},\ x_2=\ln\sqrt{8}$

$y'=e^x,\ \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+e^{2x}}.$

$$M=\int\limits_L \rho(x,y)dl=\int\limits_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{1+e^{2x}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{1+e^{2x}};\ x=\dfrac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right) \\ dx=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2tdt}{t^2-1}=\dfrac{tdt}{t^2-1} \\ \begin{array}{c|c|c} x & \ln\sqrt{3} & \ln\sqrt{8} \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_2^3\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\left(2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Ответ: $M=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}.$

б) $\begin{cases} x=2\sqrt{t} \\ y=\dfrac{2}{3}t\sqrt{t} \end{cases},\ \rho(x,y)=\sqrt{1+\dfrac{3}{4}xy},\ t_1=1,\ t_2=4.$

$$\rho(t)=\rho(x(t),y(t))=\sqrt{1+\frac{3}{4}\cdot2\sqrt{t}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t}}=\sqrt{1+t^2}$$

$$x_t'=2\cdot\left(\sqrt{t}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}},\ y_t'=\frac{2}{3}\cdot\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot t^{\frac{1}{2}}=\sqrt{t}.$$

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(\sqrt{t}\right)^2}dt=\sqrt{\frac{1}{t}+t}dt$$

$$M=\int\limits_L \rho(x,y)dl=\int\limits_1^4 \sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{t}+t}\,dt=\int\limits_1^4 \sqrt{t^3+2t+\frac{1}{t}}dt=\int\limits_1^4 \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{t}}\,dt=\int\limits_1^4 \sqrt{\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t}}\,dt=$$

$$=\int\limits_1^4 \frac{t^2+1}{\sqrt{t}}dt=\int\limits_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\left.\left(\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right|_1^4=\left.\left(\frac{2t^2\sqrt{t}}{5}+2\sqrt{t}\right)\right|_1^4=\frac{72}{5}.$$

Ответ: $\frac{72}{5}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.