Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти массу кривой $r=7(1+\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ с линейной плотностью $\gamma=\sin\varphi$.

Решение

$$r^2+\left(r'_\varphi\right)^2=49\cdot(1+\cos\varphi)^2+49\cdot(-\sin\varphi)^2=49\cdot\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=49\cdot(2+2\cos\varphi)=$$

$$=49\cdot4\cos^2\frac{\varphi}{2}=196\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$dl=\sqrt{r^2+\left(r'_\varphi\right)^2}\,d\varphi=14\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi$$

Так как $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, то $0\le\dfrac{\varphi}{2}\le\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, $\cos\dfrac{\varphi}{2}\ge0$.

$$dl=14\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=14\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

$$M=\int\limits_L\gamma\,dl=14\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=7\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}\right)d\varphi=7\cdot\left(-2\cos\frac{\varphi}{2}-\frac{2}{3}\cos\frac{3\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{56-14\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{56-14\sqrt{2}}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.