Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = \sin t; \\ z = t \end{cases}$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если плотность $\rho = \frac{zy}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$.

Решение

$$\rho(t) = \frac{z(t) \cdot y(t)}{\sqrt{6 - (x(t))^2 - (y(t))^2}} = \frac{t \sin t}{\sqrt{6 - 4\cos^2 t - \sin^2 t}} = \frac{t \sin t}{\sqrt{6 - 4\cos^2 t - 1 + \cos^2 t}} = \frac{t \sin t}{\sqrt{5 - 3\cos^2 t}},$$

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{4 - 4\cos^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{5 - 3\cos^2 t}\, dt$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(t) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{\sqrt{5 - 3\cos^2 t}} \cdot \sqrt{5 - 3\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = \begin{bmatrix} u = t; \ du = dt; \\ dv = \sin t dt; \ v = -\cos t \end{bmatrix} =$$

$$= -t\cos t \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: $M = 1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.