Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить момент инерции относительно начала координат участка однородной линии $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t); \\ y = 2(\sin t - t\cos t). \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

Решение

$$x'_t = 2(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 2t\cos t;$$
$$y'_t = 2(\cos t - \cos t + t\sin t) = 2t\sin t.$$

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = 2tdt.$$

$$x^2 + y^2 = 4(\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t) = 4(1 + t^2).$$

Так как линия однородна, то ее плотность постоянна. Обозначим плотность как γ, тогда получим:

$$I_0 = \gamma\int_L (x^2 + y^2)dl = 8\gamma\cdot\int_0^{2\pi} t(1 + t^2)dt = 8\gamma\cdot\int_0^{2\pi}(t + t^3)dt = 8\gamma\cdot\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8\gamma\cdot(2\pi^2 + 4\pi^4) = 16\pi^2\gamma\cdot(1 + 2\pi^2)$$

Ответ: $I_0 = 16\pi^2\gamma\cdot(1 + 2\pi^2)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.