Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти координаты центра масс однородной плоской кривой $L:\ x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Решение

$$x_t'=\left(e^t\right)'\cdot\sin t+e^t\cdot(\sin t)'=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t\cdot(\sin t+\cos t)$$
$$y_t'=\left(e^t\right)'\cdot\cos t+e^t\cdot(\cos t)'=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t\cdot(\cos t-\sin t)$$

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\sqrt{\left(e^t\cdot(\sin t+\cos t)\right)^2+\left(e^t\cdot(\cos t-\sin t)\right)^2}\,dt=e^t\cdot\sqrt{(\sin t+\cos t)^2+(\cos t-\sin t)^2}\,dt=$$
$$=e^t\cdot\sqrt{\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t+\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t}\,dt=$$
$$=e^t\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}dt=\sqrt{2}\,e^t\,dt$$

Пусть $(x_C;\,y_C)$ – координаты центра тяжести. Так как кривая однородна, то её плотность является постоянной, т.е. $\gamma=const$.

$$x_C=\frac{\int\limits_L x\gamma(x,y)dl}{\int\limits_L\gamma(x,y)dl}=\frac{\gamma\int\limits_L xdl}{\gamma\int\limits_L dl}=\frac{\int\limits_L xdl}{\int\limits_L dl}=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sin t\cdot\sqrt{2}e^t dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,e^t dt}=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^t dt}$$

$$y_C=\frac{\int\limits_L y\gamma(x,y)dl}{\int\limits_L\gamma(x,y)dl}=\frac{\gamma\int\limits_L ydl}{\gamma\int\limits_L dl}=\frac{\int\limits_L ydl}{\int\limits_L dl}=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\cos t\cdot\sqrt{2}e^t dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,e^t dt}=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\cos t\,dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^t dt}$$

Рассмотрим отдельно полученные интегралы.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^t dt=e^t\Big|_0^{\pi/2}=e^{\frac{\pi}{2}}-e^0=e^{\frac{\pi}{2}}-1.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt=\begin{bmatrix}u=e^{2t};\ du=2e^{2t}dt.\\ dv=\sin t\,dt;\ v=-\cos t.\end{bmatrix}=-e^{2t}\cos t\Big|_0^{\pi/2}+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\cos t\,dt=1+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\cos t\,dt=$$
$$=\begin{bmatrix}u=e^{2t};\ du=2e^{2t}dt.\\ dv=\cos t\,dt;\ v=\sin t.\end{bmatrix}=1+2\cdot\left(e^{2t}\sin t\Big|_0^{\pi/2}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt\right)=1+2e^{\pi}-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt=1+2e^{\pi}-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt\ \Rightarrow\ 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt=2e^{\pi}+1;\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin t\,dt=\frac{2e^{\pi}+1}{5}.$$

В ходе решения предыдущего интеграла было получено такое равенство:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\,dt = 1 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\,dt$$

Из этого равенства будем иметь:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\,dt - 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2e^{\pi}+1}{5} - 1\right) = \frac{e^{\pi}-2}{5}$$

Возвращаясь к x_C и y_C, получим:

$$x_C = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\,dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{t}dt} = \frac{2e^{\pi}+1}{5} : \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) = \frac{2e^{\pi}+1}{5\cdot\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}$$

$$y_C = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\,dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{t}dt} = \frac{e^{\pi}-2}{5} : \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) = \frac{e^{\pi}-2}{5\cdot\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}$$

Ответ: $x_C = \dfrac{2e^{\pi}+1}{5\cdot\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}$, $y_C = \dfrac{e^{\pi}-2}{5\cdot\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.