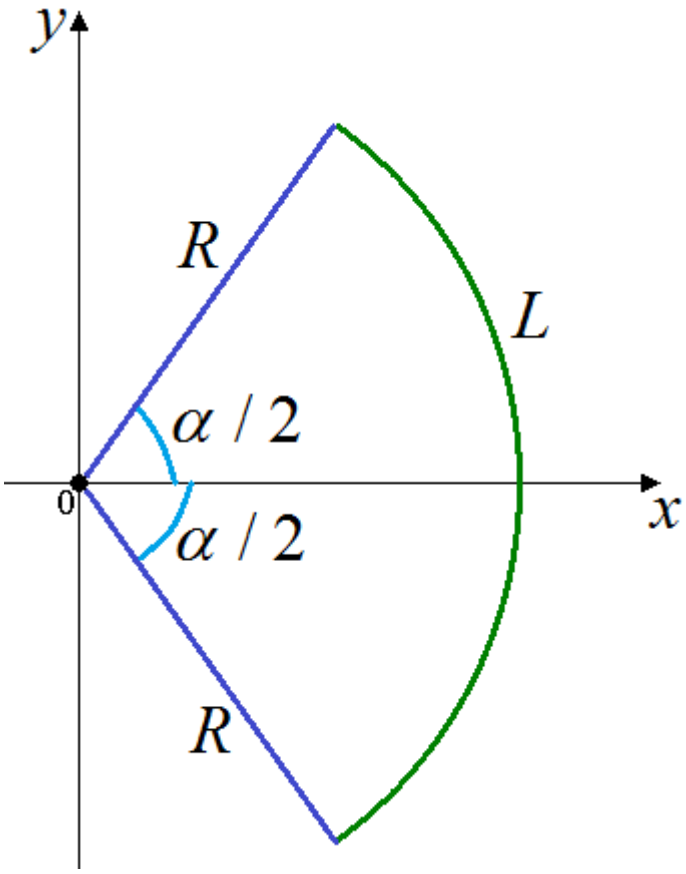
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти координаты центра масс однородной плоской кривой L, где L – дуга окружности радиуса R, стягивающая центральный угол α.

Решение

Поместим начало декартовой системы координат в центр заданной окружности, а ось Ox направим так, чтобы эта ось делила заданную дугу пополам, т.е. являлась биссектрисой центрального угла:



Уравнение окружности в этом случае будет таким: $x^2+y^2=R^2$. Так как кривая является однородной, то её плотность γ является константой.

Опишем дугу L в полярной системе координат. В полярной системе уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$ примет такой вид:

$$x^2+y^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2;\; \rho=R.$$

Для дуги L имеем: $-\frac{\alpha}{2}\le\varphi\le\frac{\alpha}{2}$. Вычислим массу дуги L.

$$dl=\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi=\sqrt{R^2+0^2}\,d\varphi=R\,d\varphi$$

$$M=\int\limits_L \gamma dl=\gamma\int\limits_L dl=\gamma\cdot\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} Rd\varphi=\gamma R\cdot\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi=\gamma R\cdot\varphi\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}=\gamma R\cdot\left(\frac{\alpha}{2}-\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\gamma R\alpha\,.$$

Пусть искомая точка центра масс имеет координаты $(x_C;y_C)$.

$$x_C=\frac{\int\limits_L x\gamma\,dl}{M}=\frac{\gamma\int\limits_L xdl}{\gamma R\alpha}=\frac{\int\limits_L xdl}{R\alpha}=\frac{\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} R\cos\varphi\cdot Rd\varphi}{R\alpha}=\frac{R^2\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\varphi\,d\varphi}{R\alpha}=\frac{R\cdot\sin\varphi\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}}{\alpha}=\frac{R\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha}=$$
$$=\frac{R\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}=\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

$$y_C=\frac{\int\limits_L y\gamma\,dl}{M}=\frac{\gamma\int\limits_L ydl}{\gamma R\alpha}=\frac{\int\limits_L ydl}{R\alpha}=\frac{\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} R\sin\varphi\cdot Rd\varphi}{R\alpha}=\frac{R^2\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\sin\varphi\,d\varphi}{R\alpha}=-\frac{R\cdot\cos\varphi\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}}{\alpha}=-\frac{R\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha}=$$
$$=-\frac{R\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}=0$$

Следовательно, искомая точка такова: $\left(\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha};0\right)$. Данная точка лежит на оси Ox на расстоянии $\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от начала координат. Так как начало координат является центром окружности, а ось Ox является биссектрисой данного центрального угла, то центр масс находится на биссектрисе центрального угла на расстоянии $\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от центра окружности.

Ответ: центр масс находится на биссектрисе центрального угла на расстоянии $\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от центра окружности.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.