Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить интеграл $\int\limits_L (y-z+3x)ds$, по контуру треугольника ABC: $A(-2;-1;1)$, $B(3;2;0)$, $C(0;0;0)$.

Решение

Так как $\overline{AB}(5;3;-1)$ – направляющий вектор прямой AB, и данная прямая проходит через точку $A(-2;-1;1)$, то параметрические уравнения её будут такими: $\begin{cases} x=5t-2; \\ y=3t-1; \\ z=-t+1 \end{cases}$. На отрезке AB имеем $0\le t\le 1$.

$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt=\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}\,dt=\sqrt{35}\,dt$$

$$\int\limits_{AB}(y-z+3x)ds=\sqrt{35}\int\limits_0^1(3t-1-(-t+1)+3(5t-2))dt=\sqrt{35}\int\limits_0^1(19t-8)dt=\sqrt{35}\cdot\left(\frac{19t^2}{2}-8t\right)\Bigg|_0^1=\frac{3\sqrt{35}}{2}.$$

Так как $\overline{BC}(-3;-2;0)$ – направляющий вектор прямой BC, и данная прямая проходит через точку $B(3;2;0)$, то параметрические уравнения её будут такими: $\begin{cases} x=-3t+3; \\ y=-2t+2; \\ z=0 \end{cases}$. На отрезке BC имеем $0\le t\le 1$.

$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+0^2}\,dt=\sqrt{13}\,dt$$

$$\int\limits_{BC}(y-z+3x)ds=\sqrt{13}\int\limits_0^1(-2t+2-0+3(-3t+3))dt=11\sqrt{13}\int\limits_0^1(-t+1)dt=11\sqrt{13}\cdot\left(-\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^1=\frac{11\sqrt{13}}{2}.$$

Так как $\overline{CA}(-2;-1;1)$ – направляющий вектор прямой CA, и данная прямая проходит через точку $C(0;0;0)$, то параметрические уравнения её будут такими: $\begin{cases} x=-2t; \\ y=-t; \\ z=t. \end{cases}$. На отрезке CA имеем $0\le t\le 1$.

$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}\,dt=\sqrt{6}\,dt$$

$$\int\limits_{CA}(y-z+3x)ds=\sqrt{6}\int\limits_0^1(-t-t+3(-2t))dt=-8\sqrt{6}\int\limits_0^1 tdt=-4\sqrt{6}\cdot t^2\Big|_0^1=-4\sqrt{6}.$$

$$\int\limits_L(y-z+3x)ds=\int\limits_{AB}(y-z+3x)ds+\int\limits_{BC}(y-z+3x)ds+\int\limits_{CA}(y-z+3x)ds=\frac{3\sqrt{35}}{2}+\frac{11\sqrt{13}}{2}-4\sqrt{6}\,.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{35}}{2}+\frac{11\sqrt{13}}{2}-4\sqrt{6}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.