Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить $\int\limits_L ydl$, где L: арка циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение

$$x'_t=2(1-\cos t),\ y'_t=2\sin t.$$

$$(x'_t)^2+(y'_t)^2=4\cdot(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=4\cdot(2-2\cos t)=4\cdot 4\sin^2\frac{t}{2}=16\sin^2\frac{t}{2}.$$

Так как $0\le t\le 2\pi$, то $0\le\frac{t}{2}\le\pi$, поэтому $\sin\frac{t}{2}\ge 0$. Следовательно, $\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=4\sin\frac{t}{2}$.

$$\int\limits_L ydl=\int\limits_0^{2\pi}2(1-\cos t)\cdot 4\sin\frac{t}{2}dt=4\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin\frac{t}{2}-2\cos t\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt=4\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{3t}{2}\right)dt=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}\left(3\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{3t}{2}\right)dt=4\cdot\left(-6\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{128}{3}.$$

Ответ: $\int\limits_L ydl=\frac{128}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.