Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислите криволинейный интеграл первого рода по кривой L от функции f, если:

1. L задаётся уравнением $x^2+y^2=2y$, $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$;
2. L – отрезок, соединяющий точки $A(2;1;-1)$ и $B(1;2;1)$; $f(x,y)=x+y$.

Решение

1) L задаётся уравнением $x^2+y^2=2y$, $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для уравнения $x^2+y^2=2y$ получим:

$$x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-2y+1=1;\ x^2+(y-1)^2=1.$$

Уравнение $x^2+y^2=2y$ задаёт окружность с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $R=1$. В полярной системе координат уравнение окружности станет таким:

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow\ \rho^2=2\rho\sin\varphi;\ \rho=2\sin\varphi.,\ 0\le\varphi\le\pi.$$

$$dl=\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi=\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}\,d\varphi=2\,d\varphi$$

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_0^\pi\left(\rho^2(\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2d\varphi=2\int\limits_0^\pi\rho(\varphi)d\varphi=4\int\limits_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi=-4\cdot\cos\varphi\Big|_0^\pi=8.$$

2) L – отрезок, соединяющий точки $A(2;1;-1)$ и $B(1;2;1)$; $f(x,y)=x+y$.

Вектор $\overline{AB}(-1;1;2)$ будет направляющим вектором прямой AB. Параметрические уравнения этой прямой: $\begin{cases}x=-t+2\\y=t+1\\z=2t-1\end{cases}$. Для отрезка интегрирования получим $0\le t\le 1$.

$$dl=\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2+\left(z'_t\right)^2}\,dt=\sqrt{1+1+4}\,dt=\sqrt{6}\,dt$$

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_0^1(-t+2+t+1)\cdot\sqrt{6}\,dt=3\sqrt{6}\int\limits_0^1 dt=3\sqrt{6}\cdot t\Big|_0^1=3\sqrt{6}.$$

Ответ: 1) 8; 2) $3\sqrt{6}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.