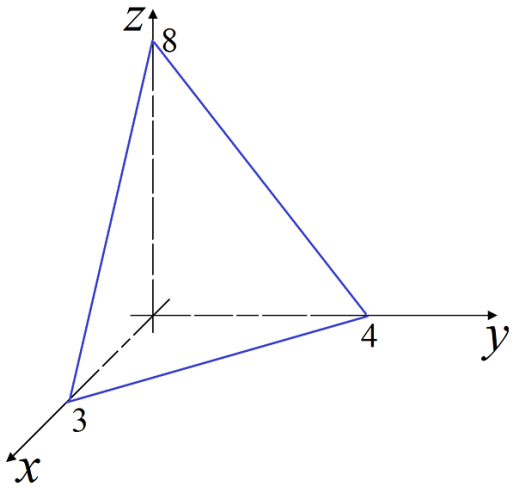
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}$ по области $V: \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

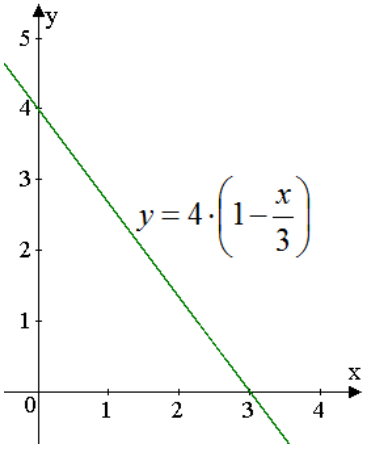
Решение

Плоскость $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1$ вместе с координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ образует пирамиду:



Для данного тела имеем $0 \le z \le 8\cdot\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)$.

В проекции на плоскость Oxy получим область, отсекаемую прямой $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, $y=4\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)$ и осями координат:



$$0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4} = 8\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{4\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)} dy \int\limits_0^{8\cdot\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)} \left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^{-4} d\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right) =$$

$$= -\frac{8}{3}\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{4\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^3}\Bigg|_0^{8\cdot\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)} dy = -\frac{8}{3}\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{4\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)} \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1\right)^3}\right) dy =$$

$$= -\frac{32}{3}\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{4\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)} \left(\frac{1}{8}-\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1\right)^{-3}\right) d\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1\right) = -\frac{32}{3}\int\limits_0^3 \left(\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1\right)+\frac{1}{2\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1\right)^2}\right)\Bigg|_0^{4\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)} dx =$$

$$= -\frac{32}{3}\int\limits_0^3 \left(\frac{1}{4}-\frac{x}{24}-\frac{1}{2\left(\frac{x}{3}+1\right)^2}\right) dx = -\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{48}+\frac{3}{2\left(\frac{x}{3}+1\right)}\right)\Bigg|_0^3 = -\frac{32}{3}\cdot\left(\frac{21}{16}-\frac{3}{2}\right) = 2$$

Ответ: $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4} = 2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.