Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^2 z\sin(xyz)dxdydz$, где $V:\begin{cases} x=2;\ y=\pi;\ z=1 \\ x=0;\ y=1;\ z=0 \end{cases}$.

Решение

Данное тело является параллелепипедом, ограниченным плоскостями $x=0$, $x=2$, $y=1$, $y=\pi$, $z=0$, $z=1$.

$$\iiint\limits_V x^2 z\sin(xyz)dxdydz = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^1 zdz \int\limits_1^\pi \sin(xyz)dy = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^1 z\cdot\left(-\frac{\cos(xyz)}{xz}\right)\Bigg|_1^\pi dz =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^1 z\cdot\left(-\frac{\cos(\pi xz)}{xz}+\frac{\cos(xz)}{xz}\right)dz = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^1 (-\cos(\pi xz)+\cos(xz))dz =$$

$$= \int\limits_0^2 x\cdot\left(-\frac{\sin(\pi xz)}{\pi x}+\frac{\sin(xz)}{x}\right)\Bigg|_0^1 dx = \int\limits_0^2\left(-\frac{\sin(\pi x)}{\pi}+\sin x\right)dx = \left(\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}-\cos x\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}-\cos 2-\left(\frac{1}{\pi^2}-1\right) = 1-\cos 2.$$

Ответ: $\iiint\limits_V x^2 z\sin(xyz)dxdydz = 1-\cos 2$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.