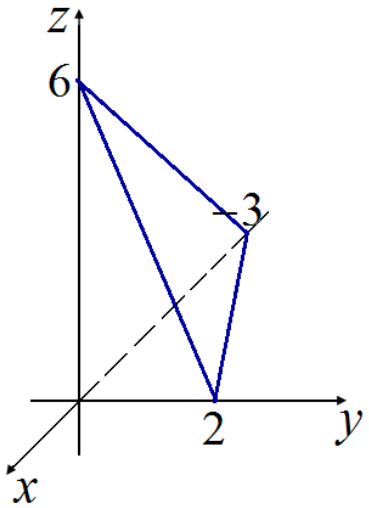
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

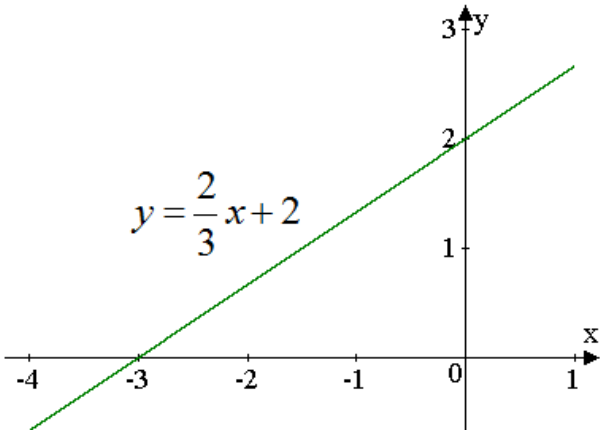
Вычислить интеграл $I=\iiint\limits_V xyzdxdydz$ по области V, ограниченной плоскостями $-2x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение

Плоскость $-2x+3y+z=6$ пересекает ось Ox в точке $(-3;0;0)$; пересекает ось Oy в точке $(0;2;0)$; пересекает ось Oz в точке $(0;0;6)$.



Для тела V имеем: $0\le z\le 6+2x-3y$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную прямой $-2x+3y=6$ и осями координат:



Для данной области имеем: $-3\le x\le 0$, $0\le y\le \frac{2}{3}x+2$.

$$I=\iiint\limits_V xyzdxdydz=\int\limits_{-3}^{0}xdx\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}x+2}ydy\int\limits_{0}^{6+2x-3y}zdz=\int\limits_{-3}^{0}xdx\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}x+2}y\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{6+2x-3y}dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{0}xdx\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}x+2}y\cdot(6+2x-3y)^2dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{0}xdx\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}x+2}\left(4x^2y-12xy^2+24xy+9y^3-36y^2+36y\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{0}x\cdot\left(2x^2y^2-4xy^3+12xy^2+\frac{9y^4}{4}-12y^3+18y^2\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{0}x\cdot\left(2x^2\left(\frac{2}{3}x+2\right)^2-4x\left(\frac{2}{3}x+2\right)^3+12x\left(\frac{2}{3}x+2\right)^2+\frac{9\left(\frac{2}{3}x+2\right)^4}{4}-12\left(\frac{2}{3}x+2\right)^3+18\left(\frac{2}{3}x+2\right)^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-3}^{0}\left(\frac{4x^5}{27}+\frac{16x^4}{9}+8x^3+16x^2+12x\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x^6}{81}+\frac{16x^5}{45}+2x^4+\frac{16x^3}{3}+6x^2\right)\Bigg|_{-3}^{0}=-\frac{9}{5}.$$

Ответ: $-\frac{9}{5}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.