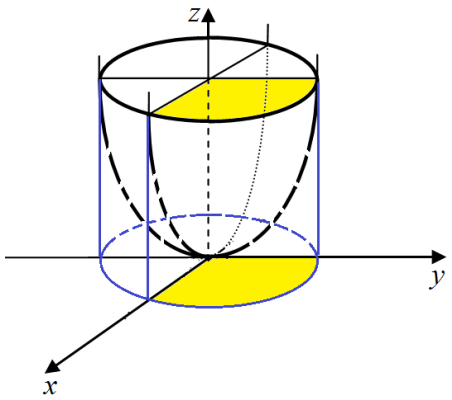
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

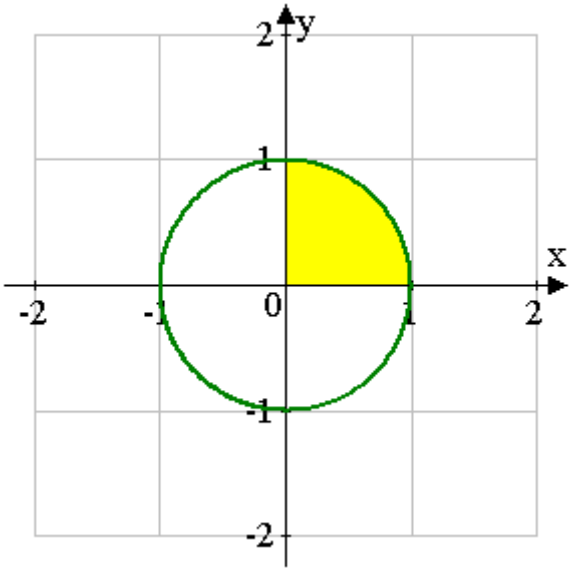
Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} xye^z dxdydz$, $\Omega: z = x^2 + y^2;\ z = 0;\ x^2 + y^2 = 1;\ x = 0;\ y = 0$.

Решение

Тело Ω ограничено параболоидом $z = x^2 + y^2$, круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и координатными плоскостями.



Для данного тела имеем: $0 \le z \le x^2 + y^2$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (центр в начале координат, радиус $R = 1$), расположенную в первой четверти:



$0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$.

$$\iiint\limits_{\Omega} xye^z dxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int\limits_0^{x^2+y^2} e^z dz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot e^z \Big|_0^{x^2+y^2} dy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y\left(e^{x^2+y^2} - 1\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(e^{x^2+y^2} - 1\right)d\left(y^2\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x \cdot \left(e^{x^2+y^2} - y^2\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x \cdot \left(e^{x^2+1-x^2} - \left(1-x^2\right) - e^{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^3 - xe^{x^2} + (e-1)x\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^3 + (e-1)x\right)dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^3 + (e-1)x\right)dx - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 e^{x^2} d\left(x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^4}{4} + \frac{(e-1)x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4} \cdot e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{e-1}{2} \right) - \frac{e-1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.