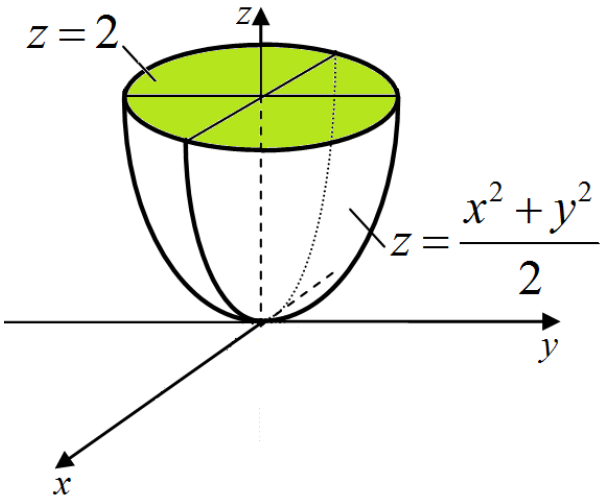
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

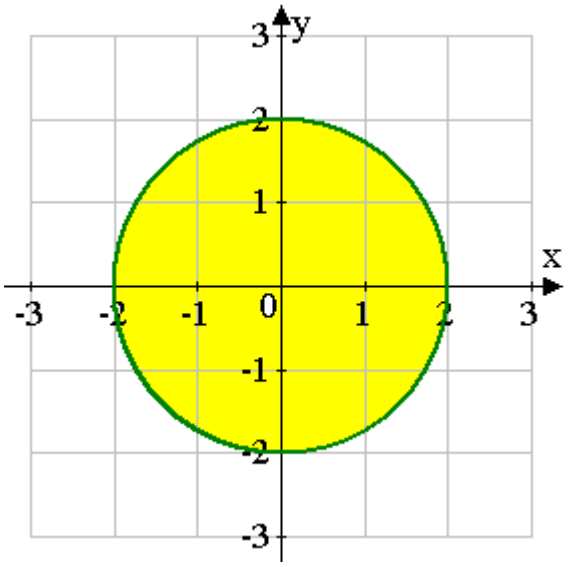
Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$ по пространственной области, определяемой указанными неравенствами: $V: x^2+y^2 \le 2z,\ z \le 2$.

Решение

Уравнение $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ определяет эллиптический параболоид, а уравнение $z=2$ задаёт плоскость. Данная плоскость пересекает параболоид по окружности $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=2 \end{cases}$.



В проекции на плоскость Oxy получим окружность $x^2+y^2=4$ с центром в начале координат и радиусом $R=2$:



Перейдём в цилиндрическую систему координат.

$$z=\frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow z=\frac{\rho^2}{2}.$$
$$x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho^2=4;\ \rho=2.$$

$0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2,\ \frac{\rho^2}{2}\le z\le 2.$

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^2 d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(2\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right)d\rho=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{8}{3}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{16\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.