Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

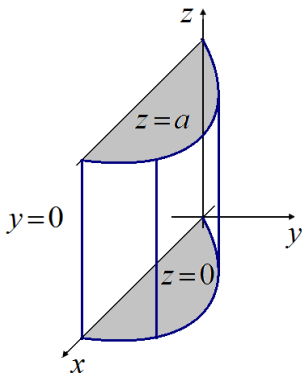
Условие

Вычислить $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где область V ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$ $(a>0)$.

Решение

$$x^2+y^2=2x,\ x^2-2x+y^2=1,\ (x-1)^2+y^2=1.$$

Уравнение $x^2+y^2=2x$ определяет прямой круговой цилиндр, в проекции которого на плоскость Oxy получим окружность с центром в точке $(1;0)$ и радиусом $R=1$. Плоскости $z=0$, $z=a$ проходят перпендикулярно оси Oz, отсекая часть данного цилиндра. Плоскость $y=0$ (Oxz) отсекает половину данного цилиндра:



Для данного тела имеем $0\le z\le a$. Перейдём в цилиндрическую систему координат. Уравнение $x^2+y^2=2x$ станет таким:

$$\rho^2=2\rho\cos\varphi,\ \rho=2\cos\varphi.$$

Для данного тела получим: $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2\cos\varphi$.

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho\int\limits_0^a zdz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\cdot\frac{z^2}{2}\bigg|_0^a d\rho=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi=\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=\frac{4a^2}{3}\cdot\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\bigg|_0^{\pi/2}=\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8a^2}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{8a^2}{9}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.