Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Решение

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ с помощью сферических или цилиндрических координат.

$$V: x^2+y^2=2x,\ x+z=2,\ z\geq 0.$$

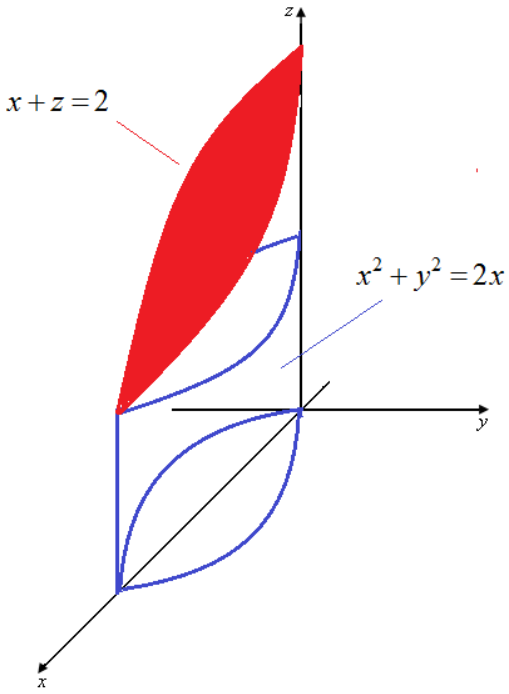
Решение

Чтобы представить, какую поверхность задаёт уравнение $x^2+y^2=2x$, преобразуем его:

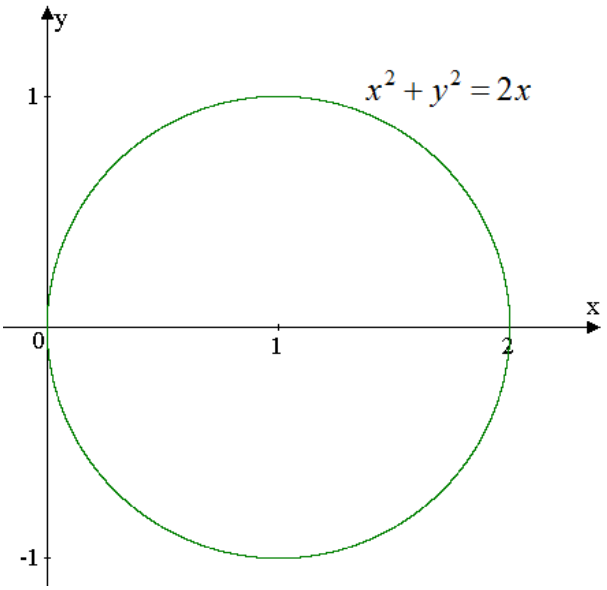
$$x^2-2x+y^2=0;$$
$$x^2-2x+1+y^2=1;$$
$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Полученное уравнение в плоскости Oxy определяет окружность с центром в точке $(1;0)$ с радиусом 1, а в трёхмерном пространстве это уравнение определяет круговой цилиндр.

Уравнение $x+z=2$ определяет плоскость, которая отсекает тело сверху. Эта плоскость параллельна оси Oy. Условие $z\geq 0$ определяет ту часть цилиндра, которая расположена над плоскостью Oxy.



В проекции на плоскость Oxy получим окружность $x^2+y^2=2x$ с центром в точке $(1;0)$ и радиусом 1:



Перейдём в цилиндрическую систему координат. Уравнение «накрывающей» плоскости $x+z=2$ станет таким:

$$\rho\cos\varphi+z=2;\ z=2-\rho\cos\varphi.$$

Для данного тела имеем: $0\le z\le 2-\rho\cos\varphi$. Уравнение $x^2+y^2=2x$ примет такой вид: $\rho^2=2\rho\cos\varphi$, откуда $\rho=2\cos\varphi$.

$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2\cos\varphi.$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}d\rho\int\limits_0^{2-\rho\cos\varphi}\rho^2dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\cdot z\Big|_0^{2-\rho\cos\varphi}d\rho=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\cdot(2-\rho\cos\varphi)d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}(2\rho^2-\rho^3\cos\varphi)d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\rho^3}{3}-\frac{\rho^4\cos\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16\cos^3\varphi}{3}-4\cos^5\varphi\right)d\varphi.$$

Так как функция косинус – чётная, то подынтегральная функция также будет чётной. Пределы интегрирования симметричны, поэтому:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16\cos^3\varphi}{3}-4\cos^5\varphi\right)d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16\cos^3\varphi}{3}-4\cos^5\varphi\right)d\varphi=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\cos^3\varphi}{3}-\cos^5\varphi\right)d\varphi=$$

$$=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\cos^2\varphi}{3}-\cos^4\varphi\right)\cos\varphi d\varphi=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4(1-\sin^2\varphi)}{3}-(1-\sin^2\varphi)^2\right)d(\sin\varphi)=\left[\begin{array}{l}t=\sin\varphi;\\ \begin{array}{c|c|c}\varphi & 0 & \frac{\pi}{2}\\ \hline t & 0 & 1\end{array}\end{array}\right]=$$

$$=8\int\limits_0^1\left(\frac{4(1-t^2)}{3}-(1-t^2)^2\right)dt=8\int\limits_0^1\left(-t^4+\frac{2t^2}{3}+\frac{1}{3}\right)dt=8\cdot\left(-\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{9}+\frac{t}{3}\right)\Bigg|_0^1=8\cdot\frac{16}{45}=\frac{128}{45}.$$

Ответ: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \frac{128}{45}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.