Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

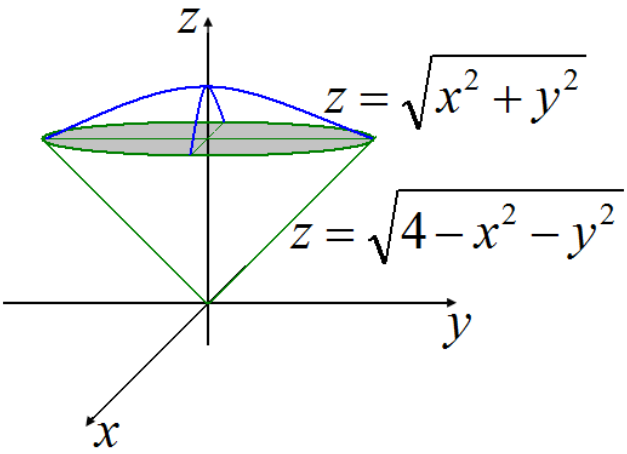
Условие

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$ по области, ограниченной данными поверхностями: $V:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение

Условие $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ определяет верхнюю половину сферы (над плоскостью Oxy) с центром в начале координат и радиусом $R=2$. Условие $z=\sqrt{x^2+y^2}$ задает верхнюю часть конуса (над плоскостью Oxy) с осью симметрии Oz. Для части тела между конусом и сферой имеем:

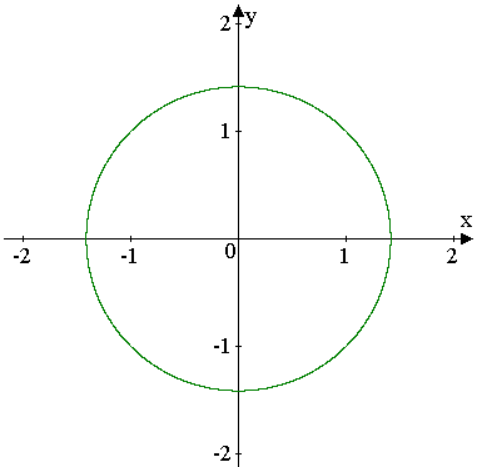
$$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$$



Найдем линию пересечения сферы и конуса:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4-x^2-y^2};$$
$$x^2+y^2=4-\left(x^2+y^2\right)$$
$$x^2+y^2=2.$$

Данные тела пересекаются в плоскости $z=\sqrt{2}$. В проекции на плоскость Oxy получим окружность $x^2+y^2=2$ с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{2}$.



Перейдем в цилиндрическую систему координат:

$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\rho$

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{4-\rho^2}$

$x^2+y^2=2$, $\rho^2=2$, $\rho=\sqrt{2}$.

$$0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le\sqrt{2},\ \rho\le z\le\sqrt{4-\rho^2}$$

$$\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int\limits_\rho^{\sqrt{4-\rho^2}}\left(\rho^2+z^2\right)dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\cdot\left(\rho^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_\rho^{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\cdot\left(\rho^2\sqrt{4-\rho^2}+\frac{\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}}{3}-\frac{4\rho^3}{3}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\rho^3\sqrt{4-\rho^2}+\frac{\rho\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}}{3}-\frac{4\rho^4}{3}\right)d\rho=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\rho^3\sqrt{4-\rho^2}+\frac{\rho\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}}{3}-\frac{4\rho^4}{3}\right)d\rho=2\pi\cdot\left(\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho+\frac{1}{3}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}d\rho-\frac{4}{3}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^4d\rho\right)=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{4-\rho^2}\,d\left(\rho^2\right)+\frac{1}{6}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}d\left(\rho^2\right)-\frac{4}{15}\cdot\rho^5\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(4-\rho^2-4\right)\sqrt{4-\rho^2}\,d\left(4-\rho^2\right)-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}d\left(4-\rho^2\right)-\frac{4}{15}\cdot4\sqrt{2}\right)=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}-4\left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)d\left(4-\rho^2\right)-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}d\left(4-\rho^2\right)-\frac{16\sqrt{2}}{15}\right)=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\left(4-\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{8\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(4-\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}-\frac{16\sqrt{2}}{15}\right)=\frac{32\pi\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{5}$$

Ответ: $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\frac{32\pi\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{5}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.