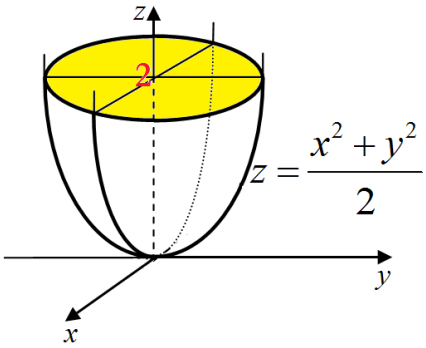
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$ по области V, ограниченной поверхностями $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

Решение

Данное тело ограничено параболоидом $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ и плоскостью $z=2$:



В сечении параболоида и плоскости получим линию, проекция которой на плоскость Oxy будет такой: $x^2+y^2=4$. Уравнение $x^2+y^2=4$ на плоскости Oxy определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 2.

Перейдем в цилиндрическую систему координат. Уравнение параболоида в этой системе станет таким: $z=\dfrac{\rho^2}{2}$, а уравнение окружности $x^2+y^2=4$ примет вид $\rho=2$. Для рассматриваемого тела:

$$0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2,\ \frac{\rho^2}{2}\le z\le 2.$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^2 d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(2\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{8}{3}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{16\pi}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{16\pi}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.