Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

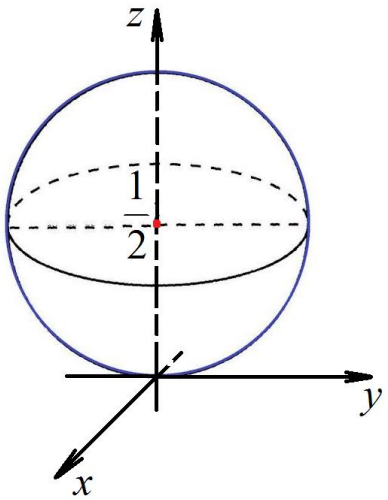
Условие

Вычислить $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где Ω ограничена поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$.

Решение

$$x^2+y^2+z^2-z=0;\ x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, уравнение $x^2+y^2+z^2=z$ определяет сферу с центром в точке $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $R=\frac{1}{2}$:



Перейдем в сферическую систему координат. Уравнение сферы в ней примет вид:

$$\rho^2=\rho\cos\theta,\ \rho=\cos\theta.$$

Для данного тела $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le\cos\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\cos\theta}\rho^3 d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\cos\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos^4\theta d\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d(\cos\theta)=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{20}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{10}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.