Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам в случае необходимости. Здесь D – верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Решение

Перейдем к сферическим координатам. Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ примет вид: $\rho = R$. Так как D – верхняя половина шара $\rho \le R$, то $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$\iiint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta - 1\right) d\left(\cos\theta\right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 \cdot \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = \frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R d\varphi = \frac{2\cdot R^5}{15}\cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi\cdot R^5}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi\cdot R^5}{15}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.