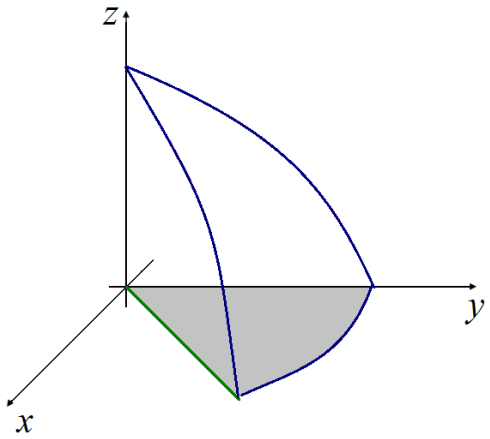
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

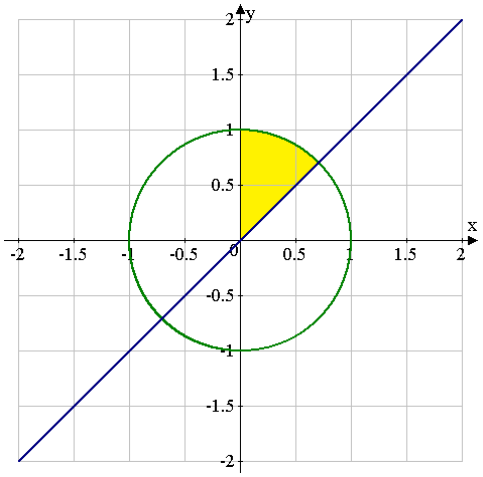
Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$, перейдя к сферическим координатам. Область V лежит в первом октанте и ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=y$, $x=0$.

Решение

Уравнение $x^2+y^2+z^2=1$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом $R=1$, а уравнение $x=y$ определяет плоскость.



В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=1$, прямой $y=x$ и осью Oy.



В сферической системе координат уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=1$ станет таким: $\rho=1$.

$$0\le\rho\le1,\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

$$\iiint\limits_V \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{4-\rho^2}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho = \varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{4}\cdot\int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho = \left[\begin{array}{l} \rho = 2\sin u;\ d\rho = 2\cos u du. \\ \begin{array}{c|c|c} \rho & 0 & 1 \\ \hline u & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 u\cdot 4\cos^2 u du = \pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(2\sin u\cos u\right)^2 du = \pi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2u du = \frac{\pi}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1-\cos 4u\right)du =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(u-\frac{\sin 4u}{4}\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi\sqrt{3}}{16}$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi\sqrt{3}}{16}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.