Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_D x^2 dxdydz$ по заданной области $D: x^2+y^2+z^2=R^2$, переходя к сферическим координатам.

Решение

Уравнение $x^2+y^2+z^2=R^2$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом R. В сферической системе координат получим:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2;\; \rho=R.$$

$D: 0\le\varphi\le 2\pi;\; 0\le\rho\le R;\; 0\le\theta\le\pi.$

$$\iiint\limits_D x^2 dxdydz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R \rho^2 d\rho\int\limits_0^{\pi}(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2\sin\theta d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^4 d\rho\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^4 d\rho\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^4 d\rho\int\limits_0^{\pi}\left(\cos^2\theta-1\right)d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^4\cdot\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi}d\rho=\frac{4}{3}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^4 d\rho=\frac{4}{15}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\rho^5\Big|_0^R d\varphi=$$

$$=\frac{4R^5}{15}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{2R^5}{15}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{2R^5}{15}\cdot\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2R^5}{15}\cdot 2\pi=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi R^5}{15}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.