Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

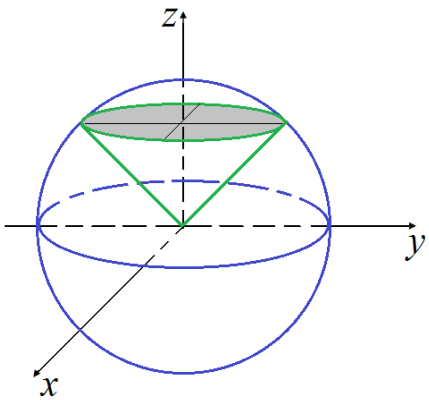
Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ по области $V:\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение

Данное тело образовано пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Найдём линию пересечения данных поверхностей:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x^2+y^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Данные поверхности пересекаются по окружности:



Перейдём в сферическую систему координат:

$$x^2+y^2+z^2=1 \ \Rightarrow\ \rho^2=1;\ \rho=1.$$
$$z=\sqrt{x^2+y^2} \ \Rightarrow\ \rho\cos\theta=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi};\ \rho\cos\theta=\rho\sin\theta;\ \operatorname{tg}\theta=1;\ \theta=\frac{\pi}{4}.$$

Для данного тела имеем: $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2\sin\theta}{\rho} d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} d\rho =$$
$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\pi$$

Ответ: $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\pi$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.