Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

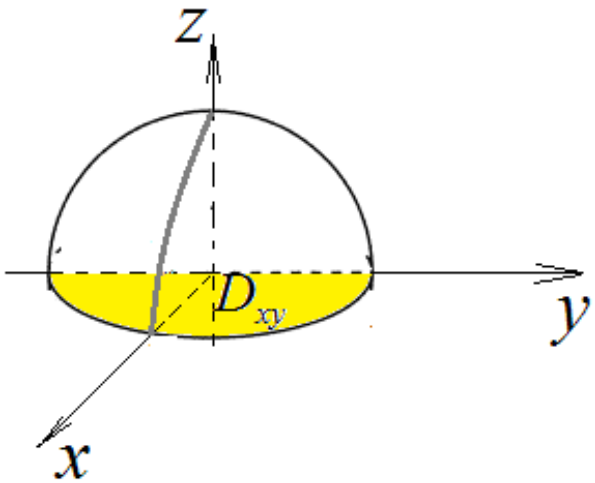
Вычислить интеграл с помощью перехода к сферическим координатам:

$$\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}\,dz$$

Решение

Исходя из данного интеграла, получим: $0 \le x \le 4$, $-\sqrt{16-x^2} \le y \le \sqrt{16-x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{16-x^2-y^2}$.

Данные неравенства определяют область, ограниченную частью полусферы $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ (центр в начале координат и радиус $R = 4$) при условии $x \ge 0$:



В проекции на плоскость Oxy получим область D_{xy}, ограниченную осью Oy и окружностью $x^2 + y^2 = 16$ ($x \ge 0$).

В сферической системе координат уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ станет таким: $\rho = 4$. Для заданного тела получим:

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 4,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 \rho^{\frac{5}{2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 \rho^{\frac{5}{2}} \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 \rho^{\frac{5}{2}} d\rho =$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^{\frac{7}{2}}\Big|_0^4 d\varphi = \frac{256}{7} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{256}{7} \cdot \varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{256 \cdot \pi}{7}$$

Ответ: $\frac{256 \cdot \pi}{7}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.