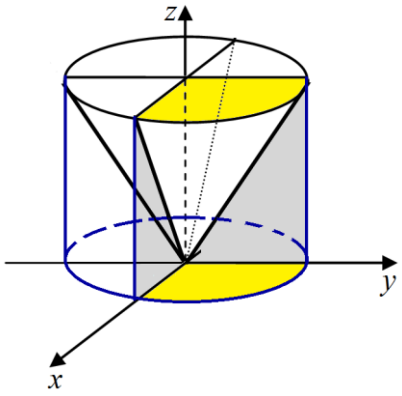
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

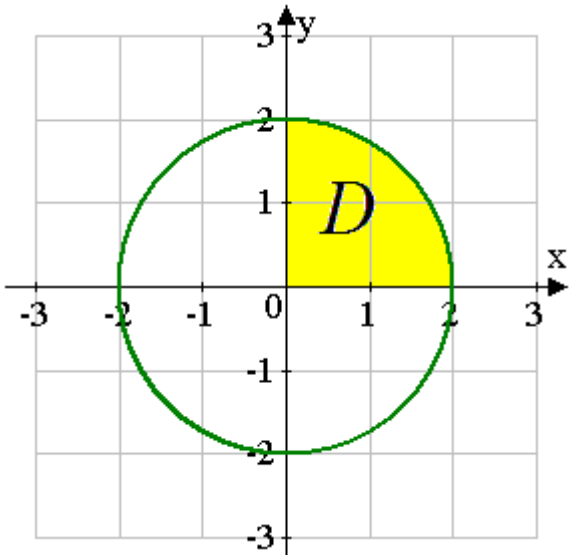
Найти массу тела V с плотностью $\mu = 2\left(x^2 + y^2\right)$, если $V: \begin{cases} 25\left(x^2 + y^2\right) = z^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0. \end{cases}$.

Решение

Данное тело ограничено круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, конусом $z^2 = 25\left(x^2 + y^2\right)$, а также координатными плоскостями.



В проекции на плоскость Oxy получим область, расположенную в первой четверти, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 4$ и осями координат.



Перейдём в цилиндрическую систему координат при условии $z \ge 0$:

$$z^2 = 25\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow\ z^2 = 25\rho^2;\ z = 5\rho.$$
$$x^2 + y^2 = 4 \ \Rightarrow\ \rho^2 = 4;\ \rho = 2.$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le z \le 5\rho.$$

$$M=\iiint\limits_V 2\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_0^{5\rho}2\rho^2dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2 2\rho^3d\rho\int\limits_0^{5\rho}dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2 2\rho^3\cdot z\Big|_0^{5\rho}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2 10\rho^4d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^5\Big|_0^2d\varphi=64\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=64\cdot\varphi\Big|_0^{\pi/2}=64\cdot\frac{\pi}{2}=32\pi.$$

Ответ: 32π.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре,
аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.