Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислите массу неоднородного тела T, ограниченного заданными поверхностями: $x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2$, $x^2+y^2=\frac{4}{7}z$, $x=0$, $y=0$, ($x\ge 0$, $y\ge 0$). Плотность в каждой точке $\mu=80yz$.

Решение

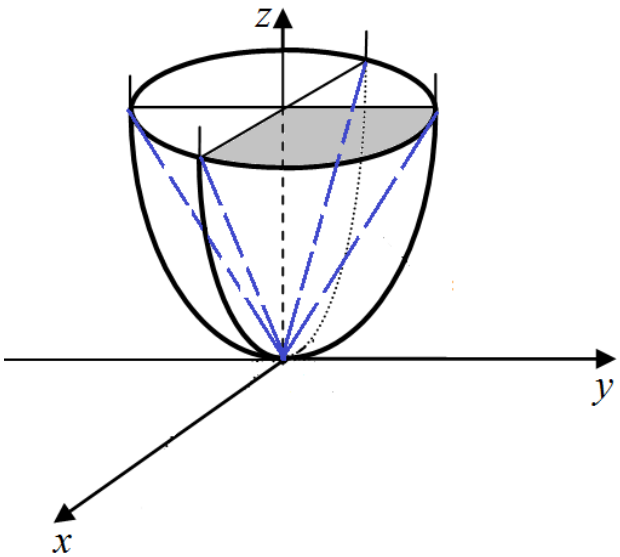
Так как $x^2+y^2\ge 0$, то из уравнения $x^2+y^2=\frac{4}{7}z$ имеем $z\ge 0$. Следовательно, из уравнения $x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2$ получим $z=\frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2}$.

Уравнение $z=\frac{7}{4}\left(x^2+y^2\right)$ определяет эллиптический параболоид, а уравнению $z=\frac{7}{4}\sqrt{x^2+y^2}$ соответствует часть кругового конуса, расположенная над плоскостью Oxy. Найдём линию пересечения параболоида и конуса:

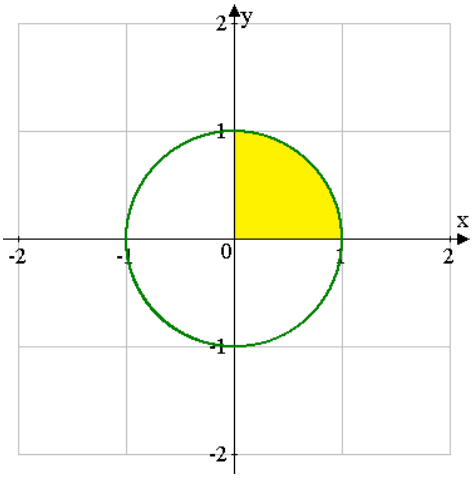
$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2 \\ x^2+y^2=\frac{4}{7}z \end{cases}$$

$$\frac{16}{49}z^2=\frac{4}{7}z;\ z\left(\frac{4}{7}z-1\right)=0;\ \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=\frac{7}{4} \end{array}\right.$$

Поверхности пересекаются по окружности $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\frac{7}{4} \end{cases}$.



В проекции на плоскость Oxy имеем область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=1$ и осями координат (в первой четверти).



Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2 \Rightarrow z=\frac{7}{4}\rho$$
$$x^2+y^2=\frac{4}{7}z \Rightarrow z=\frac{7}{4}\rho^2$$
$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \rho=1.$$

Для заданного тела имеем: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; $0\le\rho\le1$; $\frac{7}{4}\rho^2\le z\le\frac{7}{4}\rho$.

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_{\frac{7}{4}\rho^2}^{\frac{7}{4}\rho}80\cdot\rho\sin\varphi\cdot z\,dz=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^2\,d\rho\int_{\frac{7}{4}\rho^2}^{\frac{7}{4}\rho}2z\,dz=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot z^2\Big|_{7\rho^2/4}^{7\rho/4}d\rho=$$

$$=\frac{245}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1\left(\rho^4-\rho^6\right)d\rho=\frac{245}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\left(\frac{\rho^5}{5}-\frac{\rho^7}{7}\right)\Big|_0^1d\varphi=7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=-7\cdot\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}=7.$$

Ответ: 7.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.