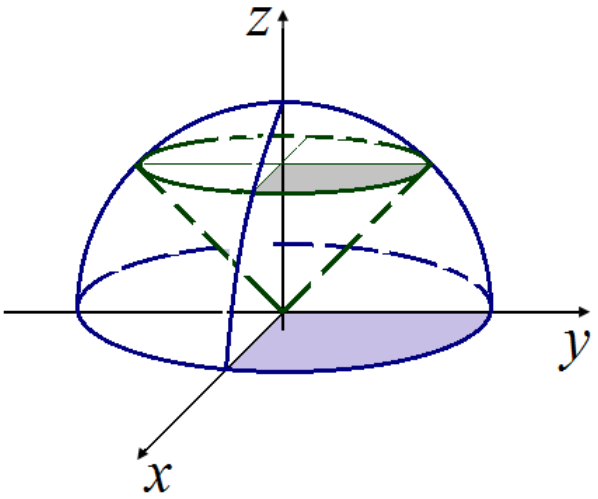
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Тело V задано ограничивающими поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x=0$, $y=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$); $\mu=6z$ – плотность. Найти массу тела.

Решение

Уравнение $x^2+y^2+z^2=4$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом $R=2$. Уравнение $z^2=x^2+y^2$ задаёт конус с осью симметрии Oz. Так как $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, то данное тело расположено в первом октанте.



В сферической системе координат получим:

$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho^2=4;\ \rho=2.$$
$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\theta=\rho\sin\theta;\ \operatorname{tg}\theta=1;\ \theta=\frac{\pi}{4}.$$

Для данного тела получим: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2$, $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$M=\iiint\limits_V 6z\,dxdydz=6\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=6\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d(\sin\theta)=$$
$$=3\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot\sin^2\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}d\rho=\frac{3}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho=\frac{3}{8}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^4\Big|_0^2 d\varphi=6\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=6\cdot\varphi\Big|_0^{\pi/2}=3\pi.$$

Ответ: 3π.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.