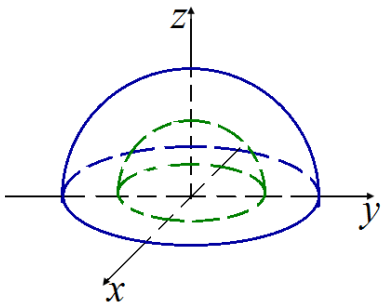
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Перейти в сферические координаты и найти массу тела, заданного неравенствами: $x^2+y^2+z^2\le 4$, $x^2+y^2+z^2\ge 1$, $z\ge 0$, $\mu = x^2+z$.

Решение

Так как $z\ge 0$, то данное тело ограничено полусферами $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=4$, расположенными над плоскостью Oxy, с центром в начале координат и радиусами $R_1=1$ и $R_2=2$:



В сферической системе координат получим:

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \rho^2=1;\ \rho=1.$$
$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho^2=4;\ \rho=2.$$

$0\le\varphi\le 2\pi$, $1\le\rho\le 2$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.

$$M=\iiint\limits_V (x^2+z)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\rho^2 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho\cos\theta)d\theta=$$
$$=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\rho^2 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\rho^2\cos^2\varphi\cdot(1-\cos^2\theta)+\rho\cos\theta)d(\cos\theta)=$$
$$=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\rho^2\cdot\left(\rho^2\cos^2\varphi\cdot\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)+\rho\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}d\rho=$$
$$=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\left(-\frac{2\rho^4\cos^2\varphi}{3}-\frac{\rho^3}{2}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\left(\frac{2\rho^4\cos^2\varphi}{3}+\frac{\rho^3}{2}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2\rho^5\cos^2\varphi}{15}+\frac{\rho^4}{8}\right)\Bigg|_1^2 d\varphi=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{62}{15}\cos^2\varphi+\frac{15}{8}\right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{31}{15}\cdot(1+\cos 2\varphi)+\frac{15}{8}\right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{31}{15}\cdot\cos 2\varphi+\frac{473}{120}\right)d\varphi$$
$$=\left(\frac{31\sin 2\varphi}{30}+\frac{473\varphi}{120}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{473\pi}{60}.$$

Ответ: $\dfrac{473\pi}{60}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.