Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти массу шара радиуса R, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна 2.

Решение

Поместим начало координат в центр шара. Уравнение сферы, ограничивающей данный шар, станет таким: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Расстояние от центра шара до произвольной точки будет таким: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Так как плотность пропорциональна кубу расстояния, то $\mu=k\cdot d^3$. Так как при $d=1$ имеем $\mu=2$, то $k=2$, т.е. $\mu=2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

Перейдем в сферическую систему координат. В этой системе $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le R$, $0\le\theta\le\pi$.

$$M=2\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdydz=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho^5\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int\limits_0^R\rho^5\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=2\cdot 2\pi\cdot\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^R\cdot\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4\pi R^6}{3}$$

Ответ: $\dfrac{4\pi R^6}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.