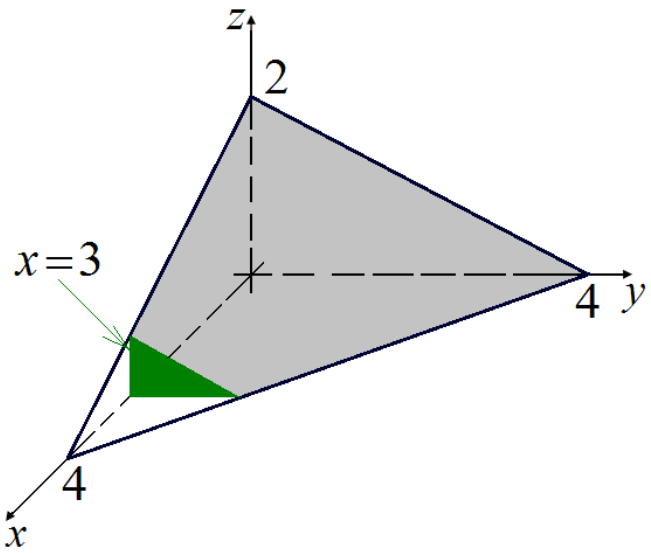
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

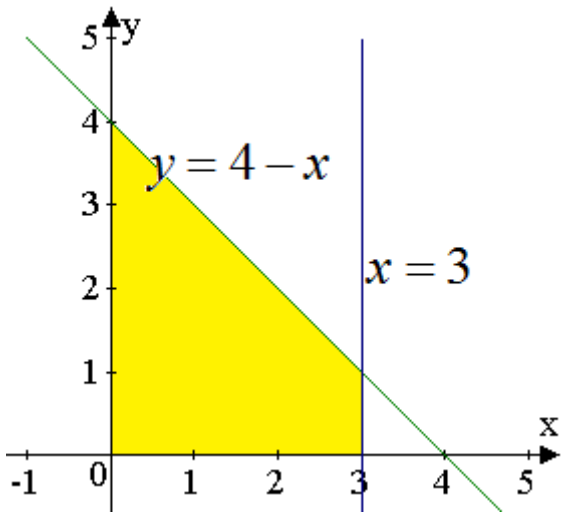
Найти момент инерции относительно точки $O(0;0;0)$ пространственной области D, ограниченной поверхностями $x+y+2z=4$, $x=0$, $y=0$, $x=3$. Плотность $\gamma=z$.

Решение

Плоскость $x+y+2z=4$ пересекает оси координат в точках $(4;0;0)$, $(0;4;0)$, $(0;0;2)$.



Для данного тела $0\le z\le\dfrac{4-x-y}{2}$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную осями координат и прямыми $x+y=4$, $x=3$. Графики прямых $x=3$ и $y=4-x$ пересекаются в точке $(3;1)$:



$0\le x\le 3,\ 0\le y\le 4-x$.

$$I_0=\iiint\limits_D\left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{4-x}dy\int\limits_0^{\frac{4-x-y}{2}}z\left(x^2+y^2+z^2\right)dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{4-x}dy\int\limits_0^{\frac{4-x-y}{2}}\left(x^2z+y^2z+z^3\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{4-x}\left(\frac{x^2z^2}{2}+\frac{y^2z^2}{2}+\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^{(4-x-y)/2}dy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{4-x}\left(\frac{x^2(4-x-y)^2}{8}+\frac{y^2(4-x-y)^2}{8}+\frac{(4-x-y)^4}{64}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{4-x}\left(\frac{x^2(y+x-4)^2}{8}+\frac{x^2y^2}{8}+\frac{xy^3}{4}-xy^2+\frac{y^4}{8}-y^3+2y^2+\frac{(y+x-4)^4}{64}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\frac{x^2(y+x-4)^3}{24}+\frac{x^2y^3}{24}+\frac{xy^4}{16}-\frac{xy^3}{3}+\frac{y^5}{40}-\frac{y^4}{4}+\frac{2y^3}{3}+\frac{(y+x-4)^5}{320}\right)\Bigg|_0^{4-x}dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(-\frac{47x^5}{960}+\frac{31x^4}{48}-\frac{19x^3}{6}+\frac{22x^2}{3}-\frac{28x}{3}+\frac{112}{15}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{47x^6}{5760}+\frac{31x^5}{240}-\frac{19x^4}{24}+\frac{22x^3}{9}-\frac{14x^2}{3}+\frac{112x}{15}\right)\Bigg|_0^3=\frac{4937}{640}.$$

Ответ: $\frac{4937}{640}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.