Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

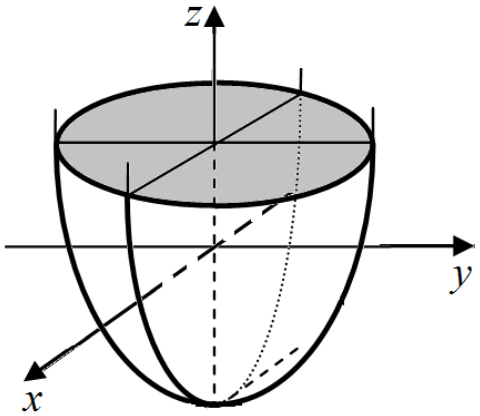
Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2 - 20$, $z = 5$. Плотность тела равна 1.

Решение

Найдем уравнение линии пересечения параболоида $z = x^2 + y^2 - 20$ и плоскости $z = 5$:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 20 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = x^2 + y^2 - 20 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases}$$

Поверхности пересекаются по окружности $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases}$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 25$ с центром в начале координат и радиусом $R = 5$.



В цилиндрической системе координат получим:

$$\rho^2 - 20 \le z \le 5;\ 0 \le \rho \le 5;\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 d\rho \int_{\rho^2-20}^5 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 \cdot z\Big|_{\rho^2-20}^5 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \rho^3 \cdot \left(25 - \rho^2\right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \left(25\rho^3 - \rho^5\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right)\Bigg|_0^5 d\varphi = \frac{15625}{12} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{15625}{12} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{15625 \cdot \pi}{6}.$$

Ответ: $I_z = \dfrac{15625 \cdot \pi}{6}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.