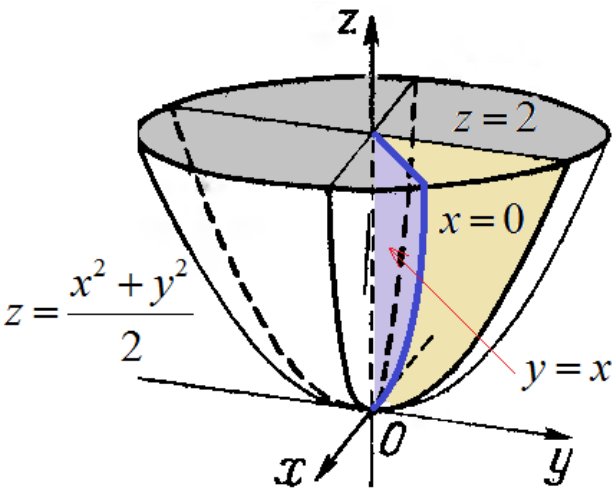
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

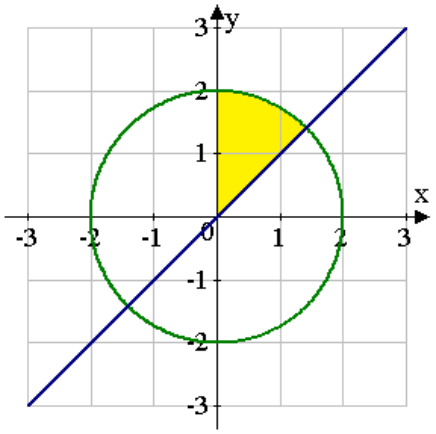
Перейти в цилиндрические координаты и найти моменты инерции I_x, I_y, I_z однородной фигуры, ограниченной поверхностями: $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$, $x \ge 0$, $y \ge x$. Плотность принять равной 1.

Решение

Данное тело ограничено параболоидом $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, плоскостями $z = 2$, $y = x$ и координатной плоскостью $x = 0$. Параболоид пересекает плоскость $z = 2$ по окружности $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$.



В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 4$, прямой $y = x$ и осью Oy:



В цилиндрической системе координат получим:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow z = \frac{\rho^2}{2}$$
$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4;\ \rho = 2.$$

$\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 2$, $\dfrac{\rho^2}{2} \le z \le 2$.

$$I_x=\iiint\limits_V\left(y^2+z^2\right)dxdydz=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2\left(\rho^2\sin^2\varphi+z^2\right)dz=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho\cdot\left(z\rho^2\sin^2\varphi+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{\rho^2/2}^2d\rho=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\left(2\rho^3\sin^2\varphi+\frac{8\rho}{3}-\frac{1}{2}\rho^5\sin^2\varphi-\frac{\rho^7}{24}\right)d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^4}{2}\sin^2\varphi+\frac{4\rho^2}{3}-\frac{1}{12}\rho^6\sin^2\varphi-\frac{\rho^8}{192}\right)\Bigg|_0^2d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{8}{3}\sin^2\varphi+4\right)d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\cos2\varphi\right)d\varphi=\left(\frac{16\varphi}{3}-\frac{2}{3}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{4\pi}{3}+\frac{2}{3}.$$

$$I_y=\iiint\limits_V\left(x^2+z^2\right)dxdydz=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2\left(\rho^2\cos^2\varphi+z^2\right)dz=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho\cdot\left(z\rho^2\cos^2\varphi+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{\rho^2/2}^2d\rho=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\left(2\rho^3\cos^2\varphi+\frac{8\rho}{3}-\frac{1}{2}\rho^5\cos^2\varphi-\frac{\rho^7}{24}\right)d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^4}{2}\cos^2\varphi+\frac{4\rho^2}{3}-\frac{1}{12}\rho^6\cos^2\varphi-\frac{\rho^8}{192}\right)\Bigg|_0^2d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{8}{3}\cos^2\varphi+4\right)d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{3}\cos2\varphi\right)d\varphi=\left(\frac{16\varphi}{3}+\frac{2}{3}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{4\pi}{3}-\frac{2}{3}.$$

$$I_z=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2dz=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot z\Big|_{\rho^2/2}^2d\rho=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\left(2\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right)d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^2d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{8}{3}\cdot\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $I_x=\frac{4\pi}{3}+\frac{2}{3}$, $I_y=\frac{4\pi}{3}-\frac{2}{3}$, $I_z=\frac{2\pi}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.