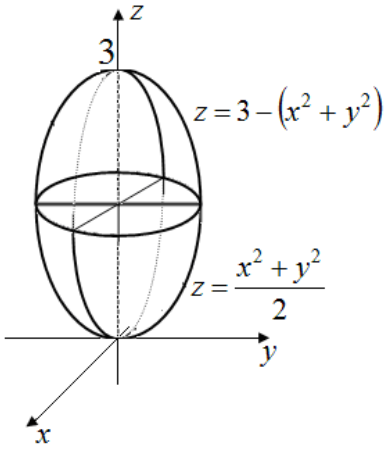
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти статический момент относительно плоскости $z=0$ однородного тела, ограниченного поверхностями $S_1: x^2+y^2=2z$, $S_2: x^2+y^2=3-z$.

Решение

Данное тело ограничено двумя эллиптическими параболоидами:



Найдем линию пересечения двух параболоидов:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2=3-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{2} \\ \dfrac{x^2+y^2}{2}=3-\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{2} \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

Параболоиды пересекаются по окружности с центром в точке $(0;0;1)$ и радиусом $R=\sqrt{2}$, расположенной в плоскости $z=1$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=2$.

Перейдем в цилиндрическую систему координат. Для данного тела имеем: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le\sqrt{2}$, $\dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 3-\rho^2$. Тело однородно, т.е. плотность постоянна. Обозначим плотность как γ, тогда:

$$M_{xy}=\gamma\iiint\limits_V z\,dxdydz=\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^{3-\rho^2}z\,dz=\frac{\gamma}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\cdot z^2\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^{3-\rho^2}d\rho=$$

$$=\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{3\rho^5}{4}-6\rho^3+9\rho\right)d\rho=\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^6}{8}-\frac{3\rho^4}{2}+\frac{9\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=2\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\gamma\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=4\pi\gamma.$$

Ответ: $M_{xy}=4\pi\gamma$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.