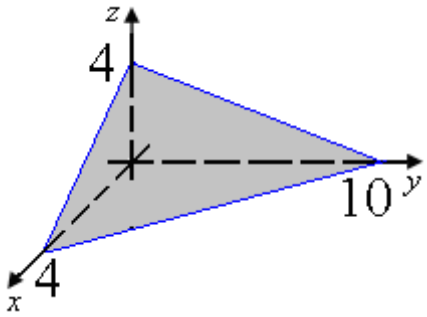
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Сделать чертёж и вычислить координаты центра тяжести и массу тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{10}+\frac{z}{4}=1$. Плотность в каждой точке равна $\mu(x,y,z)=10x$.

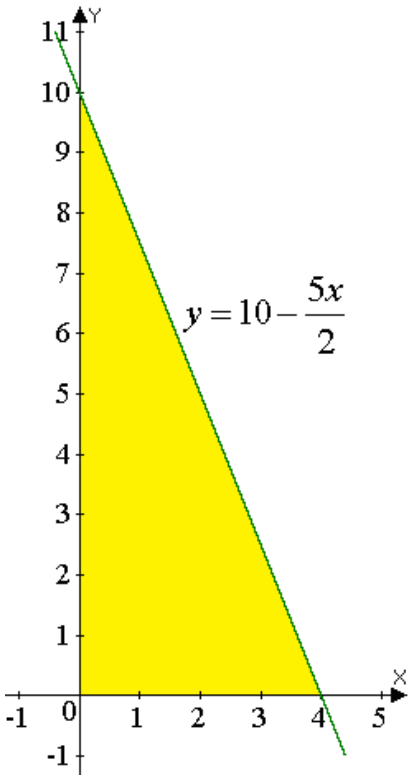
Решение

Уравнение $\frac{x}{4}+\frac{y}{10}+\frac{z}{4}=1$ определяет плоскость, которая отсекает на осях координат отрезки 4, 10, 4:



Для данного тела $0 \le z \le 4-x-\frac{2y}{5}$.

В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную прямой $\frac{x}{4}+\frac{y}{10}=1$, т.е. $y=10-\frac{5x}{2}$, и осями координат:



Для данной области $0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 10 - \frac{5x}{2}$.

$$M = \iiint\limits_G 10\,dxdydz = 10\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} dy \int\limits_0^{4-x-\frac{2y}{5}} dz = 10\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} \left(4 - x - \frac{2y}{5}\right) dy = 10\int\limits_0^4 x \cdot \left(4y - xy - \frac{y^2}{5}\right)\Bigg|_0^{10-\frac{5x}{2}} dx =$$

$$= 10\int\limits_0^4 \left(\frac{5x^3}{4} - 10x^2 + 20x\right) dx = 10 \cdot \left(\frac{5x^4}{16} - \frac{10x^3}{3} + 10x^2\right)\Bigg|_0^4 = \frac{800}{3}.$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_G 10xz\,dxdydz = 10\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} dy \int\limits_0^{4-x-\frac{2y}{5}} z\,dz = 10\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{4-x-\frac{2y}{5}} dy = 5\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} \left(4 - x - \frac{2y}{5}\right)^2 dy =$$

$$= \frac{25}{2}\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} \left(\frac{2y}{5} + x - 4\right)^2 d\left(\frac{2y}{5} + x - 4\right) = \frac{25}{2}\int\limits_0^4 x \cdot \frac{\left(\frac{2y}{5} + x - 4\right)^3}{3}\Bigg|_0^{10-\frac{5x}{2}} dx = \frac{25}{2}\int\limits_0^4 \left(-\frac{x^4}{3} + 4x^3 - 16x^2 + \frac{64x}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{25}{2} \cdot \left(-\frac{x^5}{15} + x^4 - \frac{16x^3}{3} + \frac{32x^2}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{640}{3}.$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_G 10xy\,dxdydz = 10\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} y\,dy \int\limits_0^{4-x-\frac{2y}{5}} dz = 10\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} y\left(4 - x - \frac{2y}{5}\right) dy = 10\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} \left(4y - xy - \frac{2y^2}{5}\right) dy =$$

$$= 10\int\limits_0^4 x \cdot \left(2y^2 - \frac{xy^2}{2} - \frac{2y^3}{15}\right)\Bigg|_0^{10-\frac{5x}{2}} dx = 10\int\limits_0^4 \left(-\frac{25x^4}{24} + \frac{25x^3}{2} - 50x^2 + \frac{200x}{3}\right) dx =$$

$$= 10 \cdot \left(-\frac{5x^5}{24} + \frac{25x^4}{8} - \frac{50x^3}{3} + \frac{100x^2}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1600}{3}.$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_G 10x^2\,dxdydz = 10\int\limits_0^4 x^2\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} dy \int\limits_0^{4-x-\frac{2y}{5}} dz = 10\int\limits_0^4 x^2\,dx \int\limits_0^{10-\frac{5x}{2}} \left(4 - x - \frac{2y}{5}\right) dy = 10\int\limits_0^4 x^2 \cdot \left(4y - xy - \frac{y^2}{5}\right)\Bigg|_0^{10-\frac{5x}{2}} dx =$$

$$= 10\int\limits_0^4 \left(\frac{5x^4}{4} - 10x^3 + 20x^2\right) dx = 10 \cdot \left(\frac{x^5}{4} - \frac{5x^4}{2} + \frac{20x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1280}{3}.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\frac{1280}{3}}{\frac{800}{3}} = \frac{8}{5};\ y_C = \frac{\frac{1600}{3}}{\frac{800}{3}} = 2;\ z_C = \frac{\frac{640}{3}}{\frac{800}{3}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\left(\frac{8}{5};\ 2;\ \frac{4}{5}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.